На правах рукописи

Магденко Евгений Петрович

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СОПРЯЖЁННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (ФГБУН ИВМ СО РАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Андреев Виктор Константинович,
Официальные оппоненты:	Филимонов Михаил Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского» УрО РАН, отдел прикладных задач, ведущий научный сотрудник;
	Хабиров Салават Валеевич доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт механики им. Р.Р. Мавлютова» УНЦ РАН, лаборатория «Дифференциальные уравнения механики», заведующий лабораторией
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет», г. Барнаул

Защита состоится 20 мая 2016 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН ИВМ СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» апреля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Александр Анатольевич Шлапунов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы

Большой теоретический и практический интерес представляют задачи о формировании конвекции в жидкостях. Динамика развития структур течения существенно зависит от граничных условий или внутренних источников. Кроме того, значительное влияние могут оказать внутренние поверхности раздела, фронты химических реакций, потоки тепла и примеси. Так, известно, что в неоднородно нагретой жидкости возникает движение, и часто это происходит в двух и более жидких средах, контактирующих вдоль некоторых поверхностей раздела. Если при взаимодействии жидкости не смешиваются друг с другом, то они формируют поверхность раздела. В качестве примеров можно привести систему нефть-вода[1], внутренние волны, плёночные течения[2]. В настоящее время интерес к моделям многофазных потоков с учётом различия физических и химических факторов возникает при проектировании систем охлаждения и электростанций, росте кристаллов и плёнок, в аэрокосмической промышленности[3]. При этом существенное влияние на устойчивость равновесия и движения жидкостей с поверхностью раздела или со свободной поверхностью оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярную неустойчивость (эффект Марангони). Исследование такого рода процессов приводит к сопряжённым начально-краевым задачам и связано с большими математическими трудностями: нелинейностью уравнений и граничных условий на поверхностях раздела, неизвестностью областей определения решений. Таким образом, изучение сопряжённых задач гидродинамики в той или иной выбранной модели уравнений движения является актуальной задачей.

В диссертации и исследуются линейные сопряжённые краевые и начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными соответственно эллиптического и параболического типов, описывающих осесимметрические движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях.

Цель диссертации

Цель работы заключается в исследовании: 1) сопряжённой краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными эл-

[1] Андреев, В. К. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев, Ю. А. Гапоненко, О. Н. Гончарова, В. В. Пухначёв. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с.

[2] Андреев, В. К. Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. – 356 с.

[3] Зейтунян, Р. Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара - Марангони / Р. Х. Зейтунян // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 169. – Вып. 3. – С. 259-286.

липтического типа и сопряжённой начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих распределение тепла в конечном цилиндре; 2) спектральных задач о потере устойчивости равновесия двух покоящихся жидкостей в цилиндре при наличии плоской деформируемой поверхности раздела и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной деформируемой плоской границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой; 3) обратной сопряжённой линейной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающей осесимметрическое термокапиллярное движении при малом числе Марангони двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе, общая поверхность раздела которых предполагается недеформируемой и в одном случае является подвижной, а в другом – фиксированной.

Объекты исследования

Объектом исследования являются линейные сопряжённые краевые и начально-краевые задачи для уравнений соответственно эллиптического и параболического типов, описывающих движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях для осесимметрического случая.

Методы исследования

В данной работе для нахождения решений использовались метод разделения переменных, метод преобразования Лапласа, метод априорных оценок, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что численные результаты здесь носят, в основном, вспомогательный иллюстративный характер.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

– построены решения в виде рядов Фурье по функциям Бесселя для сопряжённой краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа и для сопряжённой начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих осесимметрическое распределение тепла в конечном цилиндре; доказана сходимость построенных рядов и единственность решения; получены условия, при которых решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим;

определены условия на входные данные, при которых решения являются классическими.

– исследованы спектральные задачи об устойчивости равновесия двух покоящихся жидкостей в цилиндре при наличии плоской деформируемой поверхности раздела (при этом произведён учёт энергии, затрачиваемой на её деформацию) и однослойной жидкости, находящейся в состоянии покоя, в цилиндрическом контейнере с верхней свободной деформируемой плоской границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой. В качестве математической модели используются уравнения Обербека – Буссинеска. В обоих случаях получены явные зависимости спектрального параметра от геометрии области и физических параметров жидкостей.

– получены априорные оценки скорости сходимости решений начально-краевых обратных сопряжённых линейных задач с интегральными условиями переопределения для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих осесимметричное термокапиллярное движение при малом числе Марангони для двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. При этом их общая поверхность раздела предполагается недеформируемой и в первом случае является подвижной, а во втором – фиксированной. Для обеих сопряжённых задач получены достаточные условия сходимости решений к стационарному режиму; во второй задаче в образах по Лапласу решение найдено в явном виде, получено стационарное решение, и приведённые тестовые расчёты для конкретных жидких сред хорошо согласуются с полученными априорными оценками.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные результаты носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в области дифференциальных уравнений. Результаты также имеют практическую значимость ввиду их приложений в природных (слои в океанах и атмосфере) и технологических (рост кристаллов, изготовление плёнок) процессах.

Результаты диссертации получены в рамках интеграционного проекта СО РАН № 38 и грантов РФФИ № 11-01-00283, № 14-01-00067.

Обоснованность и достоверность

Обоснованность и достоверность полученных результатов, содержащихся в диссертации, обеспечивается использованием классических математических моделей механики вязких теплопроводных жидкостей и математических методов их исследования, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

В соответствии с паспортом специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в диссертации рассмотрены начально-краевые задачи, получены априорные оценки и доказаны теоремы о сходимости нестационарных решений к стационарным режимам. Поэтому полученные результаты соответствуют пунктам 2 (начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений) и 3 (качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений).

Апробация работы.

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах:

– XLIII Краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным науками, Красноярск, 2010;

– XI Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, Красноярск, 2010;

– XLIX Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» , Новосибирск, 2011;

– VIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука» (Красноярск, 2012);

– L Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» , Новосибирск, 2012;

– LXVI Международной научной конференции «Герценовские чтения – 2013», С.-Петербург, 2013;

– Международной научной конференции «Информационно–вычислительные технологии и математическое моделирование» , Кемерово, 2013;

– V Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения», Бийск, 2014;

– Конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям ИВМ СО РАН, Красноярск, 2015;

– Международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», Улан-Удэ - Байкал, 2015;

– объединённом семинаре ИВМ СО РАН и СФУ «Математическое моделирование в механике» под руководством профессора В. К. Андреева, Красноярск;

– семинар в ИМиФИ СФУ «Обратные задачи» под руководством профессора Ю. Я. Белова, Красноярск.

Публикации и личный вклад автора.

По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 5 статей в ведущих изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций [1–5], остальные работы опубликованы в сборниках трудов и тезисов научных конференций, в том числе международных и всероссийских.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, который содержит 72 наименования. Общий объём диссертации – 116 страниц, включая 10 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся обоснование актуальности работы, приведён обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены её основные результаты. Приведена математическая формулировка начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающей двухслойные конвективные движения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в поле тяжести.

В качестве математической модели в диссертации используются уравнения Обербека – Буссинеска, которые записываются в цилиндрической системе координат. Пусть жидкость *1* занимает область Ω_{1t}, а жидкость *2* — область Ω_{2t}, и они контактируют, не смешиваясь, по поверхности раздела Γ_t. Рассматриваются два типа границ раздела. В первом из них Γ_t описывается уравнением $f(r,\varphi,z,t) \equiv r - h(\varphi,z,t) = 0$, а во втором $f(r,\varphi,z,t) = z - h_1(r,\varphi,t) = 0$. Выписываются условия на поверхности Γ_t для каждого случая.

В **первой главе** исследуются сопряжённые краевые задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа и сопряжённые начально-краевые задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих распределение тепла для двух контактирующих несмешивающихся жидкостей в конечном цилиндре, боковая поверхность и основания которого являются твёрдыми. Внутренние источники тепла отсутствуют. Система находится в состоянии покоя. Исследуется осесимметрический случай. В § 1.1 рассматривается решение стационарной задачи

$$\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_j}{\partial r}+\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial z^2}=0,\quad j=1,2. \tag{1}$$

На всей поверхности цилиндра, основания и боковые стенки которого являются твёрдыми, задана температура

$$\Theta_1(r,-h_1)=A_1(r),\quad \Theta_2(r,h_2)=A_2(r).\quad \Theta_j(R,z)=T_j(z). \tag{2}$$

На поверхности раздела двух сред задаются условия равенства температур и потоков тепла, которые имеют вид

$$\Theta_1(r,0)=\Theta_2(r,0),\quad k_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial z}(r,0)=k_2\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}(r,0). \tag{3}$$

Для непрерывности решения добавлены условия согласования на входные данные. Доказано, что если классическое решение сформулированной задачи существует, то оно единственно. Доказана

Теорема 1. Формальное решение задачи (1)-(3) представимо в виде рядов Фурье по функциям Бесселя нулевого порядка и является классическим, если выполнены следующие условия:

$$|a_m^j|\le\frac{a^j}{(\xi_m)^{3+\varepsilon}},\quad |b_m^j|\le\frac{b^j}{m^{3+\varepsilon_1}}, \tag{4}$$

где a_m^j – коэффициенты разложения в ряд Фурье функций $A_j(r)$ по функциям Бесселя нулевого порядка $J_0(\xi_m r/R)$ (ξ_m – m-й корень уравнения $J_0(\xi)=0$); b_m^j – коэффициенты разложения в ряд Фурье функций $T_j(z)$ по $\sin(\pi m z/h_j)$; $\varepsilon>0$, $a^j>0$, $\varepsilon_1>0$ и $b^j>0$ — постоянные.

В § 1.2 рассматривается решение нестационарной задачи, которая имеет вид

$$\frac{\partial\Theta_j}{\partial t}=\chi_j\left(\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_j}{\partial r}+\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial z^2}\right). \tag{5}$$

Граничные условия таковы:

$$\begin{gathered}\Theta_1(r,-h_1,t)=A_1(r,t),\quad \Theta_2(r,h_2,t)=A_2(r,t),\Theta_j(R,z,t)=T_j(z,t),\\ \Theta_1(r,0,t)=\Theta_2(r,0,t),\quad k_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial z}(r,0,t)=k_2\frac{\partial\Theta_2}{\partial z}(r,0,t)\end{gathered} \tag{6}$$

с заданными функциями $T_j(z,t)$, $A_j(r,t)$. Кроме того, $|\Theta_j(0,z,t)| < \infty$ и в начальный момент времени

$$\Theta_j(r,z,0) = \Theta_j^0(r,z). \tag{7}$$

Для гладких решений добавляются условия согласования на входные данные. Доказана

Лемма 1. Решение задачи (5)-(7) представимо в виде формальных рядов Фурье по функциям Бесселя нулевого порядка

$$\Theta_j(r,z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m^j(z,t) J_0\left(\frac{\xi_m r}{R}\right),$$

причём коэффициенты ряда определяются с помощью преобразования Лапласа.

Кроме того, была доказана

Теорема 2. Пусть $T_j(z,t) \in C^3(l_j)$ при $t \in [0,T]$, $l_1 = [-h_1, 0]$, $l_2 = [0, h_2]$ и $\|\Theta_j^0\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jz}^0\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jrr}^0\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzz}^0\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} < \infty$, $\|\Theta_{jzzz}^0\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} < \infty$, $\Gamma = [0,R]$, тогда если выполняются условия

$$|c_m^j(t)| \le \frac{|c^j(t)|}{m^{1+s+\varepsilon}}, \quad |d_m^j(t)| \le \frac{|d^j(t)|}{m^{1+s_1+\varepsilon_1}} \tag{8}$$

при $s \ge 4$, $s_1 \ge 3.5$, где $c_m^j(t)$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье функций $A_j(r,t)$ по функциям Бесселя нулевого порядка $J_0(\xi_m r/R)$, $d_m^j(t)$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье функций $T_j(z,t)$ по $\sin(\pi m z/h_j)$ и $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, функции $c^j(t) \in C^2([0,T])$ и $d^j(t) \in C^2([0,T])$, то формальное решение задачи (5)-(7) является классическим.

Также в этом параграфе, доказана

Теорема 3. Если выполняются условия

$$\int_0^\infty \|A_j^c - A_j\|_{L_2(\Gamma)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty, \quad \int_0^\infty \|T_j^c - T_j\|_{L_2(l_j)} e^{\delta\tau} d\tau < \infty, \tag{9}$$

где $\delta = \min\limits_{j=1,2}\left(\chi_j/h_j^2\right)$ и $A_j^c(r)$, $T_j^c(z)$ — функции температур, заданные соответственно на основаниях цилиндра и его боковой поверхности для краевой задачи (1), (2), то решение нестационарной начально-краевой задачи (5)-(6) при $t \to \infty$ выходит на стационарный режим и справедлива оценка

$$\|\Theta_j - \Theta_j^c\|_{L_2(\Gamma\times l_j)} \le C_j e^{-\delta t}. \tag{10}$$

Здесь $\Theta_j^c(r,z)$ – стационарное решение краевой задачи (1), (2).

Во **второй главе** исследуются спектральные задачи о потере устойчивости равновесия двух жидкостей, которые контактируют, не смешиваясь, по плоской деформируемой поверхности раздела в конечном цилиндре (§ 2.1) и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере конечных размеров с верхней деформируемой свободной плоской границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой (§ 2.2). В результате в § 2.1 для стационарного осесимметрического случая из системы уравнений в рамках модели Обербека – Буссинеска получим

$$p_{jz} = \rho_{oj} g \beta_j \Theta_j, \quad \Theta_j = A_j z + B_j,$$

где β_j – коэффициент теплового расширения j-ой жидкости, а температурные коэффициенты находятся следующим образом:

$$A_1 = -\frac{k\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad A_2 = -\frac{\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad B_1 = B_2 = \frac{h_2\Theta_{01}}{h_2 + kh_1}, \quad k = k_2/k_1,$$

здесь Θ_{01} – температура на нижнем основании цилиндра.

Когда Θ_{01} достигает некоторого критического значения, то возникает движение – конвекция. С целью определения Θ_{01} рассматривается линеаризованная на равновесном состоянии задача о малых осесимметрических возмущениях системы в рамках модели Обербека – Буссинеска, решение которой ищется в виде нормальных волн. В задаче предполагается, что боковые стенки сосуда проводимые и на них выполняется условие просачивания жидкости, при этом общий поток жидкости через всю боковую поверхность равен нулю. Данное условие позволяет воспользоваться методом разделения переменных. При этом задача сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка, решение которого найдено в аналитической форме, и в результате для монотонных возмущений в случае деформируемой поверхности раздела доказана

Лемма 2. В условиях полной невесомости ($g = 0$) зависимость спектрального параметра (числа Марангони M) от геометрии контейнеров и физических параметров жидкости имеет вид

$$\mathrm{M} = \frac{4m^2 \mathrm{Pr}\left(A - k\mu S_1 S_2 \mathrm{M}_1 \left(m^2 - S_2^2\right)\left(m^2h^2 - S_1^2\right)\right)}{\mathrm{Pr} Z - Q\mathrm{We}^{-1}}, \tag{11}$$

где

$$A = 2\left(kS_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^3h^2\mu + m^3h - m^2S_1C_1 - m^2h^2\mu S_2C_2 - \right.$$
$$\left. - mhS_2^2 - m\mu S_1^2 + \mu S_2 S_1^2 C_2 + S_2^2 S_1 C_1\right);$$
$$Z = k\mu\left(m^5h^3\chi S_2C_1 - m^3h^3\chi S_2^3C_1 + m^3S_1^3C_2 + m^2h^2S_2^3S_1 - m^5h^2S_1C_2 - \right.$$
$$\left. - m^2\chi S_1^3 S_2 + \chi S_1^3 S_2^3 - S_1^3 S_2^3\right);$$
$$Q = 8km^3\left(S_1C_2 + S_2C_1\right)\left(m^2h^2\mu - m^2h^2 + h^2S_2^2 - \mu S_1^2\right);$$

$\mu = \rho_2\nu_2/\rho_1\nu_1$, $S_1 = \mathrm{sh}\, mh$, $C_1 = \mathrm{ch}\, mh$, $S_2 = \mathrm{sh}\, m$, $C_2 = \mathrm{ch}\, m$, $m = \alpha\delta_n = h_1\delta_n/R$, а δ_n, $n = 1, 2, ...$, есть решение уравнения $J_0(\delta) = 0$, $h = h_1/h_2$, h_j

– высота j-го слоя жидкости, Pr, We – числа Прандтля и Вебера, определяемые физическими свойствами жидкостей; параметр M_1 характеризует энергию, затрачиваемую на деформацию поверхности раздела.

Если $g \neq 0$, то справедлива

Лемма 3. Спектральный параметр зависит от геометрии контейнера и физических параметров жидкости $\mathrm{M}(\alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Ga}, \mathrm{Pr}, \delta_n)$ (здесь Ga – число Галилея) и находится в явном виде.

При этом если в формуле, выражающей зависимость спектрального параметра от физических параметров жидкости и геометрии контейнера в лемме 3 перейти к пределу при $g \to 0$, то получим выражение (11).

Так как формула $\mathrm{M}(\alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Ga}, \mathrm{Pr}, \delta_n)$ имеет громоздкий вид, то для установления некоторых свойств рассматриваются конкретные жидкости: система трансформаторное масло – муравьиная кислота. Например, при увеличении отношения высоты нижнего слоя жидкости к радиусу цилиндра критическое значение Θ_{01} уменьшается. Такой же эффект наблюдается и при увеличении h.

В § 2.2 задача решается аналогичным образом, как и в предыдущем параграфе. В результате доказана

Лемма 4. В условиях полной невесомости зависимость спектрального параметра от геометрии контейнеров и физических параметров жидкости выражается следующим образом:

$$\mathrm{M} = \frac{8m\,(\mathrm{Bi}\,\mathrm{sh}\,m + m\,\mathrm{ch}\,m)\,(m - \mathrm{sh}\,m\,\mathrm{ch}\,m)}{m^3\,\mathrm{ch}\,m - \mathrm{sh}^3\,m - 8m^3\,\mathrm{ch}\,m\,(\mathrm{Pr}\mathrm{We})^{-1}}, \tag{12}$$

где Bi – число Био.

Доказано, что если радиус цилиндра и номер корня функции Бесселя устремить к бесконечности по специальному закону, то выражение (12) совпадёт с известным соотношением для числа Марангони для бесконечного слоя, полученным ранее[4].

Для случая, когда $g \neq 0$, доказана

Лемма 5. Спектральный параметр зависит от геометрии контейнера и физических параметров жидкости $\mathrm{M}(\alpha, h, \mathrm{We}, \mathrm{Bi}, \mathrm{Ga}, \mathrm{Pr}, \delta_n)$ и определяется в явном виде.

Глава 3 посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта три уравнений, описывающих осесиммтерческое движение вязкой теплопроводной жидкости, построенного на четырёхмерной подалгебре Ли $G_4 = \langle \partial_z, \partial_{w_j} + t\partial_z, \partial_{p_j}, \partial_{\theta_j} \rangle$, допускаемой системой уравнений модели Обербека – Буссинеска. Оно интерпретируется как двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твёрдой стенкой и общей

[4]Рябицкий, Е. А. Колебательная термокапиллярная неустойчивость равновесия плоского слоя в присутствии поверхностно-активного вещества / Е. А. Рябицкий // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1993. – №1. – С. 6-10.

подвижной недеформируемой поверхностью раздела. Таким образом, частично инвариантное решение ищется в виде

$$
\begin{gathered}
u_j = u_j(r,t), \quad w_j = z v_j(r,t), \quad p_j = d_j(r,t) - \frac{f_j(t)}{2} z^2, \\
\theta_j = a_j(r,t) z^2 + b_j(r,t), \quad d_{jr} = \nu_j \left(u_{jrr} + \frac{1}{r} u_{jr} - \frac{u_j}{r^2} \right) - u_{jt} - u_j u_{jr}.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Начально - краевая задача для функций $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$, $b_j(r,t)$, $h(z,t)$, где $h(z,t)$ – функция поверхности раздела, является сильно нелинейной и обратной, так как функции $f_j(t)$ также являются искомыми. Действительно, если из уравнений сохранения масс исключить $u_j(r,t)$, то получим сопряжённую задачу для нахождения функций $v_j(r,t)$, $a_j(r,t)$ и $h(z,t)$. При известных $u_j(r,t)$, $a_j(r,t)$ задача для функций $b_j(r,t)$ отделяется. Функции $d_j(r,t)$ восстанавливаются квадратурой из последнего уравнения (13). При переходе к безразмерным переменным, в уравнениях при нелинейных слагаемых и в кинематических условиях при линейных членах, содержащих скорости, появится сомножитель в виде числа Марангони (M). Динамическое условие после проектирования на нормаль и перехода к безразмерным параметрам будет содержать в правой части число Вебера (We). В предположении, что температурные коэффициенты поверхностного натяжения сравнимы по величине и $\mathrm{M} \ll 1$, а также $\mathrm{We} \gg 1$, задача заменяется линейной. Также предполагается, что в начальный момент времени поверхность раздела была круглым цилиндром.

Выпишем полностью полученную линейную сопряжённую обратную начально-краевую задачу в размерном виде, полагая, что при $\mathrm{M} \ll 1$ поверхность раздела есть $h(t) = R_1[1 + \mathrm{M}h_1(t)]$:

$$
v_{1t} = \nu_1 \left(v_{1rr} + \frac{1}{r} v_{1r} \right) + f_1(t), \quad 0 < r < R_1 + \mathrm{M}h_1(t), \tag{14}
$$

$$
v_{2t} = \nu_2 \left(v_{2rr} + \frac{1}{r} v_{2r} \right) + f_2(t), \quad R_1 + \mathrm{M}h_1(t) < r < R_2, \tag{15}
$$

$$
v_1(R_1,t) = v_2(R_1,t), \quad \int\limits_0^{R_1} r v_1(r,t)\,dr + \int\limits_{R_1}^{R_2} r v_2(r,t)\,dr = 0, \tag{16}
$$

$$
\mu_1 v_{1r}(R_1,t) - \mu_2 v_{2r}(R_1,t) = -2æ a_1(R_1,t), \tag{17}
$$

$$
v_2(R_2,t) = 0, \tag{18}
$$

$$
v_1(r,0) = 0, \quad |v_1(0,t)| < \infty, \quad v_2(r,0) = 0, \tag{19}
$$

$$
\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t) - \frac{2æ a_1(R_1,t)}{R_1}. \tag{20}
$$

Задача для функций $a_j(r,t)$ является замкнутой:

$$a_{jt} = \chi_j \left(a_{jrr} + \frac{1}{r}\, a_{jr} \right),$$

$$a_j(r,0) = a_j^0(r), \quad |a_1(0,t)| < \infty,$$

$$a_2(R_2,t) = \alpha(t),$$

$$a_1(R_1,t) = a_2(R_1,t), \quad k_1 a_{1r}(R_1,t) = k_2 a_{2r}(R_2,t).$$

Функции $u_j(r,t)$ определяются из уравнений сохранения масс следующими равенствами:

$$u_1(r,t) = -\frac{1}{r} \int\limits_0^r r v_1(r,t) dr, \quad u_2(r,t) = -\frac{1}{r} \int\limits_{R_2}^r r v_2(r,t) dr.$$

В § 3.2 и § 3.3 получены неулучшаемые априорные оценки для решений $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ поставленных задач, равномерные на своих областях определения, и на их основе в § 3.4 доказана

Теорема 4. Если сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty |\alpha^{(k-1)}(\tau)| e^{\eta\tau} d\tau, \quad k = 1, ..., 4,$$

так что

$$|\alpha^{(k-1)}(t)| = \alpha_k(t) e^{-\eta t}, \quad \int\limits_0^\infty \alpha_k(\tau) d\tau < \infty, \quad \alpha_k(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

то для функций $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$, $h_1(t)$ справедливы априорные оценки, из которых следует, что эти функции при $t \to \infty$ экспоненциально стремятся к нулю ($\eta = M_0^{-1} \min\limits_j (\chi_j / k_j)$, M_0 – положительная известная постоянная).

В **четвёртой главе** исследуемая задача отличается от задачи, рассматриваемой в предыдущей главе, тем, что здесь поверхность раздела между двумя несмешивающимися вязкими теплопроводными жидкостями является фиксированной. В результате вместо второго условия (16) и (20) будем иметь равенства

$$\int\limits_0^{R_1} r v_1(r,t)\, dt = 0, \quad \int\limits_{R_1}^{R_2} r v_2(r,t)\, dt = 0.$$

Первое равенство вытекает из условия сохранения масс и кинематического условия, а второе – из условия прилипания для компоненты скорости на ось r в области $R_1 < r < R_2$. Кроме того, в отличие от задачи (14)-(19) для функции

$v_j(r,t)$, в данной главе начальные данные являются ненулевыми. Задача для $a_j(r,t)$ записывается аналогичным образом, как и в предыдущей главе.

В § 4.2 найдено стационарное решение задачи. В § 4.3 получены априорные оценки решений $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ и доказано, что если сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha'(\tau)|\,d\tau$$

то данные функции с ростом времени равномерно стремятся к нулю. В § 4.4 в изображениях по Лапласу получены точные решения нестационарных задач для функций $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$. В § 4.5 сформулированы условия, при которых данные решения с ростом времени стремятся к стационарному, а именно доказана

Теорема 5. Если интегралы

$$\int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha^c-\alpha(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty e^{\eta\tau}|\alpha'(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty |\alpha''(\tau)|e^{\eta\tau}\,d\tau$$

сходятся, то функции $a_j(r,t)$, $v_j(r,t)$, $f_j(t)$ при $t\to\infty$ экспоненциально стремятся к их стационарным значениям α^c, $v_j^c(r)$, f_j^c, соответственно,

$$|a_j(r,t)-\alpha^c| \leqslant C_j e^{-\eta t/2}, \quad |v_j(r,t)-v_j^c(r)| \leqslant W_j e^{-\eta_2 t/4},$$

$$|f_j(t)-f_j^c| \leqslant H_j e^{-\eta_2 t/4},$$

где

$$\eta_2=\min(\eta,\eta_1), \quad \eta_1 = 2\xi_1^2 \min\left(\frac{\nu_1}{R_1^2}, \frac{\nu_2}{2(R_2-R_1)^2}\right),$$

C_j, H_j, W_j – положительные постоянные, ξ_1 – первый положительный корень уравнения $J_1(\xi)=0$.

Заключение содержит основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построены решения в виде рядов Фурье по функциям Бесселя сопряжённой краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа и сопряжённой начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих осесимметрическое распределение тепла в конечном цилиндре, когда температура на всей границе цилиндров известна. Доказана сходимость построенных рядов и единственность решения. Указаны условия, при которых решение нестационарной задачи с ростом времени выходит на стационарный режим. Определены условия на входные данные, при которых решения являются классическими.

2. Исследованы спектральные задачи об устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии плоской деформируемой поверхности раздела и однослойной жидкости в цилиндрическом контейнере с верхней свободной деформируемой плоской границей, на которой задано третье краевое условие – теплообмен с окружающей средой. В обоих случаях получены явные зависимости спектрального параметра от геометрии области и физических параметров жидкостей.

3. Получены априорные оценки скорости сходимости решений начально-краевых обратных сопряжённых линейных задач с интегральными условиями переопределения для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих осесимметричное термокапиллярное движение при малом числе Марангони для двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе. При этом их общая поверхность раздела предполагается недеформируемой и в первом случае является подвижной, а во втором – фиксированной. Получены достаточные условия сходимости решений обеих задач к стационарному режиму. Во второй задаче найдено стационарное решение, в образах по Лапласу решение получено в явном виде, приведённые тестовые расчёты для конкретных жидких сред хорошо согласуются с полученными априорными оценками.

Автор выражает благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Виктору Константиновичу Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК Министерства образования и науки РФ

1. Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2010. – Т. 4. – Вып. 4. – С. 519-526.
2. Магденко, Е. П. О потере устойчивости равновесия двух жидкостей в цилиндре при наличии границы раздела / Е. П. Магденко // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – Вып. 4. – С. 558-565.
3. Магденко, Е. П. О возникновении движения в конечном цилиндре / Е.П. Магденко // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 5. – Вып. 6. – С. 75-82.
4. Magdenko, E. P. Axisymmetric Thermocapillary Motion in a Cylinder at Small Marangoni Number / E. P. Magdenko // Siberian Federal University. Mathema-

tics & Physics. – 2015. – V. 8. – № 3. – P. 303-311.
5. Магденко, Е. П. Конвекция Марангони в конечном цилиндре / Е. П. Магденко // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 1. – С. 142-151.

Другие работы по теме диссертации

6. Магденко, Е. П. Об определении стационарных полей температур в контактирующих конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов XLIII Краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам – Красноярск: ИПК СФУ, 2010. – С. 74-78.
7. Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов XI Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. – С. 32.
8. Магденко, Е. П. Решение стационарной сопряжённой задачи теплообмена в конечных цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов 50-ой Международной студенческой научной конференции «Студент и научно-технический прогресс». – Новосибирск: НГУ, 2012. – С. 112.
9. Магденко, Е. П. О линеаризованной сопряжённой задаче конвекции в конечном цилиндре / Е. П. Магденко // Материалы конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2013. – С. 85-90.
10. Магденко, Е. П. Решение линеаризованной сопряжённой задачи конвекции в цилиндрах / Е. П. Магденко // Сборник трудов Международной конференции «Герценовские чтения – 2013 ». – СПб.: Изд-во РГПУ им А. И. Герцена, 2013. – С. 62-66.
11. Магденко, Е. П. О возникновении конвекции в конечном цилиндре при наличии границы раздела / Е. П. Магденко // Тезисы докладов 5-ой Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения». – Бийск, 2014. – С. 68.
12. Магденко, Е. П. Осесимметрическое термокапиллярное движение в цилиндре при малых числах Марангони / Е. П. Магденко // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование". – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2015 – С. 178.
13. Магденко, Е. П. Априорные оценки сопряжённой задачи, описывающей осесимметричное термокапиллярное движение при малых числах Марангони / Е. П. Магденко. – Препринт № 16-1. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2016. – 31 с.