

На правах рукописи



ЛАЗОВСКИЙ Эдуард Николаевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ  
КАК КОМПОНЕНТА ЭЛЕКТРОПРИВОДА  
В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ**

Специальность 05.09.03 – Электротехнические комплексы и системы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Красноярск 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Сибирский федеральный университет" на кафедре "Электротехнические комплексы и системы".

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент  
**Федоренко Александр Александрович**

Официальные оппоненты: **Сапсалёв Анатолий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет», кафедра Общей электротехники, заведующий кафедрой

**Дементьев Юрий Николаевич**, кандидат технических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», кафедра «Электропривод и электрооборудование», заведующий кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет»

Защита состоится 21.04.2016 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 999.007.02, созданного на базе Сибирского федерального университета и Института вычислительного моделирования СО РАН, по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. акад. Киренского, д. 26, ИКИТ, ауд. УЛК115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Сибирского федерального университета <http://www.sfu-kras.ru>

Автореферат разослан " \_\_\_ " марта 2016 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета



Бронов  
Сергей Александрович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Электроприводы на основе трехфазных асинхронных электрических машин занимают доминирующее положение во всех отраслях производственной деятельности.

В связи с созданием и серийным производством высокоэффективных систем формирования электромагнитного момента и скорости вращения вала асинхронной машины, высокими технико-экономическими, энергетическими, эксплуатационными характеристиками асинхронных электрических машин и систем электроприводов на их основе, происходит внедрение управляемого асинхронного электропривода даже там, где традиционно применялся нерегулируемый или параметрически регулируемый привод. Это позволяет поднять ряд технологических процессов на качественно другой уровень.

Таким образом, трехфазная асинхронная электрическая машина становится основным типом электромеханического преобразователя энергии, а управляемые электроприводы на ее основе – основным типом промышленного привода.

Большой вклад в решение этой важнейшей научно-технической задачи внесли М. М. Ботвинник, И. Я. Браславский, А. А. Булгаков, А. М. Вейнгер, Д. А. Завалишин, Н. Ф. Ильинский, В. И. Ключев, М. П. Костенко, В. В. Рудаков, Ю. А. Сарбатов, О. В. Слежановский, Б. П. Соустин, И. М. Чиженко, Р. Т. Шрейнер, В. А. Шубенко, И. И. Эпштейн, F. Blaschke, W. Floter, H. Ripperger и многие другие отечественные и зарубежные учёные.

В основе построения современных систем управления асинхронными электроприводами лежат математические модели асинхронной машины, характеризующие её как элемент системы электропривода, в которых, как правило, трехфазные переменные представлены декартовыми координатами результирующих векторов. Такие математические модели достаточно полно описаны в трудах Р. Парка, Г. Крона, Е. Я. Казовского, В. А. Шубенко, А. А. Янко-Триницкого, К. П. Ковача, И. Раца, Р. Т. Шрейнера, А. М. Вейнгера и многих других. Их свойства глубоко исследованы, и они нашли весьма широкое применение в практике создания автоматизированных асинхронных электроприводов.

Но декартовы координаты – это не единственно возможная форма представления результирующих векторов. Как известно, вектор в трехмерном пространстве можно характеризовать, например, цилиндрическими координатами, а вектор на плоскости – полярными, которые, как и декартовы, хорошо вписываются в геометрию электрической машины.

Математические модели асинхронной машины с использованием в качестве переменных состояния цилиндрических и полярных координат результирующих векторов мало освещены в литературе, и недостаточно изучены. В то же время, например, в работах Шрейнера Р.Т., Полякова В.Н., Федоренко А.А., Panasjuka A.I. и т.д. есть примеры весьма успешного применения фрагментов

таких моделей для исследования процессов и построения систем управления асинхронными электроприводами.

Математические модели в полярных координатах не только расширяют возможность исследования, но и обеспечивают возможность создания новых структур систем автоматического управления асинхронными электроприводами.

Таким образом, существует научно-техническая задача, лежащая в области развития общей теории электротехнических комплексов и систем, изучения системных свойств и связей, физического, математического, имитационного и компьютерного моделирования компонентов электротехнических комплексов и систем, которая может быть сформулирована как разработка, исследование и применение математических моделей асинхронной машины в полярных координатах, как компонента электропривода.

**Объектом исследования** является трехфазная асинхронная электрическая машина как компонент электропривода. **Предмет исследования** – комплекс математических моделей асинхронной машины, как компоненты электропривода, в полярных координатах.

**Цель работы.** Целью работы является разработка, исследование свойств и иллюстрация эффективности применения в научной и инженерной практике математических моделей асинхронной машины, как компонента электропривода, использующих в качестве переменных состояния полярные координаты результирующих векторов трехфазной системы сигналов.

**Идея работы** заключается в использовании в качестве переменных состояния полярных, а в случае линейнонезависимых трёхфазных сигналов цилиндрических координат векторных переменных при математическом описании процессов в трехфазной асинхронной машине как компоненте электропривода.

**Задачи работы.** Цель исследования предопределяет решение следующих задач:

1. Ввести и обосновать понятие пространственного результирующего вектора плоской трехфазной линейно независимой системы сигналов.
2. Разработать и исследовать комплекс математических моделей асинхронной машины с использованием в качестве переменных состояния полярных и цилиндрических координат векторных переменных.
3. Разработать и исследовать набор математических моделей асинхронной машины инвариантных к скорости вращения системы координат.
4. На основе полученных моделей разработать и исследовать математические модели систем прямого и плавного пуска асинхронных двигателей насосов насосных станций от источника соизмеримой мощности.

**Научную новизну** работы составляет развитие общей теории электротехнических комплексов и систем, заключающееся в разработке, исследовании свойств и иллюстрации эффективности применения математических моделей асинхронной машины, как компонента электропривода, в полярных и цилиндрических координатах, в частности:

– впервые введено и обосновано понятие результирующего пространственного вектора для трехфазной плоской линейнонезависимой системы сигналов, что позволило развить понятие обобщенной электрической машины, дополнив её перпендикулярными к плоскости поперечного сечения магнитонесвязанными обмотками на статоре и роторе;

– разработаны и исследованы математические модели асинхронной машины, в которых векторные переменные состояния представлены их полярными, а в случае линейнонезависимых трёхфазных сигналов цилиндрическими координатами и модели инвариантные к скорости вращения системы координат при условии постоянства ее параметров, а также учитывающие насыщение главной магнитной цепи и эффект вытеснения тока ротора;

–с помощью предлагаемых моделей изучены характеристики асинхронного электропривода, ненаблюдаемые при моделировании в декартовых координатах.

#### **Теоретическая значимость:**

1. Математически доказана возможность представления в общем случае линейно независимой плоской трехфазной системы сигналов при описании процессов в асинхронной машине пространственным результирующим вектором.

2. Предложена модернизация обобщенной электрической машины, которая позволила учесть нулевую составляющую трёхфазных переменных.

3. Предложена простая и компактная методика преобразования векторно-матричных уравнений обобщенной электрической машины к комплексу уравнений в полярных координатах, в том числе инвариантных к скорости вращения системы координат, на основе математического аппарата комплексных функций.

4. Раскрыты особенности предлагаемых моделей в сравнении с моделями в декартовых координатах относительно их структуры и организации вычислительного процесса.

#### **Практическая значимость:**

1. Разработанный комплекс математических моделей асинхронной машины в полярных координатах позволяет воспроизводить переменные не наблюдаемые в моделях в декартовых координатах. Это определяет область практического использования разработанных математических моделей при анализе динамических и установившихся режимов электроприводов.

2. Предлагаемые математические модели отличаются другим набором переменных состояния асинхронной машины и, следовательно, могут быть рекомендованы для практического использования при проектировании асинхронных электроприводов, в которых регулируемы переменными являются модули и аргументы (разности аргументов) результирующих векторов.

3. На основе предлагаемых подходов сформулированы предложения по применению моделей при проектировании электроприводов позволяющие, в частности, обоснованно выбирать систему плавного пуска асинхронных электродвигателей.

троприводов насосов канализационных, водоперекачивающих, турбокомпрессорных и т.д. станций и режимы ее работы.

**Методы исследования.** Цель работы достигается комплексным использованием аналитических методов исследования и методов математического моделирования. При решении поставленных задач использовались методы теории автоматического управления, электромеханики, электротехники. Программные реализации предлагаемых математических моделей и численные исследования воспроизводимых ими процессов выполнены в вычислительной среде MATLAB (пакет прикладных математических программ SIMULINK).

**Достоверность результатов и выводов** подтверждается корректным математическим обоснованием разработанных моделей, сопоставимостью полученных результатов с положениями электромеханики и совпадением результатов моделирования процессов в асинхронной машине на предлагаемых моделях с результатами, полученными на широко используемых в практике моделях в декартовых координатах.

**Реализация результатов работы.** Полученные в работе результаты приняты к использованию в проектной практике при выборе электроприводов и проектировании систем автоматики ОАО «Сибцветметниипроект», а также внедрены в учебный процесс кафедры «Электротехнические комплексы и системы» Политехнического института ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет».

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Введение понятия пространственного результирующего вектора трехфазной линейнонезависимой плоской системы сигналов, позволяет развить модель обобщенной электрической машины на случай наличия в трёхфазных сигналах нулевой составляющей.

2. Сравнение математических моделей асинхронной машины с постоянными параметрами в полярной системе координат и моделей инвариантных к скорости вращения системы координат для различных комбинаций векторных переменных с уравнениями в декартовой системе координат доказывает правомочность введения полярной системы координат и даёт практически совпадающие результаты их решений.

3. Математические модели асинхронной машины в полярных координатах позволяют учесть насыщение главной магнитной цепи и вытеснение тока ротора с той же точностью, что и модели в декартовых координатах.

4. Результаты исследований математических моделей систем прямого и плавного пуска асинхронных электроприводов насосов трубопровода от источника соизмеримой мощности в полярной системе координат иллюстрируют удобство её применения для анализа и синтеза систем автоматизированных асинхронных электроприводов.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на IV международной научно-практической конференции «Энергетика и энергоэффективные технологии» (Липецк, 2010), на V юбилейной международной научно-технической конфе-

ренции «Электромеханические преобразователи энергии» (Томск, 2011), на Всероссийской научно-технической конференции «Управление и информатика в технических системах» (Красноярск, 2013), на XIII международной научно-практической конференции «Современные концепции научных исследований» (Москва, 2015).

**Личный вклад автора составляют:** математическое обоснование понятия пространственного результирующего вектора плоской трёхфазной линейнонезависимой системы сигналов; разработка всех представленных в диссертационной работе математических моделей; выполненные с их помощью исследования и анализ полученных при этом результатов.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 7 научных работ, в том числе 3 опубликованы в изданиях из перечня ВАК.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка из 123 наименований и 7 приложений. Общий объем работы 208 страниц. Основная часть изложена на 175 страницах текста и содержит 92 рисунка и 12 таблиц в приложениях. Приложения изложены на 22 страницах.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** на основании аналитического обзора литературных источников обоснована актуальность тематики диссертационной работы, определены, цели и задачи исследования. Также сформулированы метод, научная новизна, практическая ценность исследования и основные положения, выносимые на защиту. Показана достоверность полученных результатов. Дана краткая аннотация всех её разделов.

**В первом разделе** приведены двумерные векторно-матричные уравнения электромагнитных контуров обобщенной электрической машины. Отмечено, что применение этих уравнений для анализа электромагнитных процессов в трехфазных электрических машинах ограничено условием линейной взаимосвязи между фазными переменными. При линейнонезависимой трехфазной системе сигналов такая математическая модель характеризует процессы в реальной машине не в полной мере. Она учитывает только ненулевые составляющие трехфазных сигналов и не учитывает их нулевые составляющие.

С целью устранения этого ограничения в работе введено и обосновано понятие пространственного (трехмерного) обобщенного (результирующего) вектора плоской линейнонезависимой системы сигналов.

Предложено плоской трёхфазной линейнонезависимой системе сигналов (рис.1) поставить в соответствие некоторый пространственный вектор (рис.2).

Для того, чтобы вектор  $\vec{U}$  однозначно определялся мгновенными значениями трехфазных сигналов, необходимо установить аналитическую связь между ними и координатами вектора  $\vec{U}$ . Для этого необходимо задать взаимное расположение плоскости трехфазных сигналов и трехмерной системы координат.

Если совместить начало координат трехмерной системы с точкой  $O$  плоскости, а саму плоскость ориентировать в пространстве так, чтобы нормаль к ней из точки  $O$  образовывала с осями  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  равные углы (рис. 3), то направляющие косинусы нормали  $ON$  будут равны:

$$\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \cos \varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

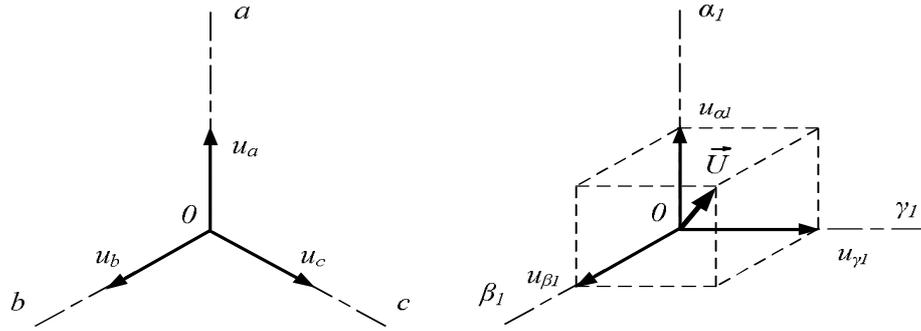


Рисунок 1 – Плоская трёхфазная система    Рисунок 2 – Пространственный вектор

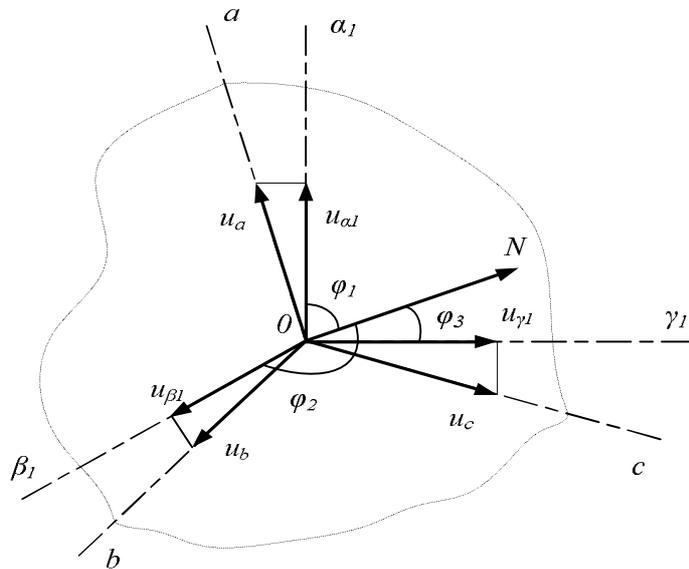


Рисунок 3 – Взаимоположение координатных систем

При таком положении плоскости отображения на нее осей  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  из любой точки, принадлежащей нормали  $ON$ , дают систему трех смещенных относительно друг друга на угол  $120^\circ$  и пересекающихся в точке  $O$  осей, т.е. образуют плоскую систему координат  $a, b, c$  трехфазных сигналов  $u_a, u_b, u_c$ .

Считая, что координаты вектора  $\vec{U}$  есть проекции соответствующих фазных величин на оси  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  (см. рис. 3), можно записать:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_{\alpha 1} \\ u_{\beta 1} \\ u_{\gamma 1} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $u_{\alpha 1}, u_{\beta 1}, u_{\gamma 1}$  – координаты обобщенного вектора  $\vec{U}$ ;

$u_a, u_b, u_c$  – мгновенные значения фазных величин;

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  – множитель, определяемый соотношением  $\sin \varphi_i = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_i}$ ,  
 $i = 1, 2, 3$ ;

$\mathbf{E}$  – единичная квадратная матрица, каждая строка которой это координаты единичных направляющих векторов осей  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  трехмерного пространства.

Рис. 3 и уравнение (2) показывают физическую сущность представления трехфазной плоской системы сигналов обобщенным пространственным вектором. Однако в практических целях удобнее пользоваться пространственными координатными системами, оси которых ориентированы определенным образом относительно магнитных и геометрических осей индукционных источников и потребителей энергии. Поэтому в качестве базовой целесообразно рассматривать координатную систему  $\alpha, \beta, \gamma$ , ось  $\alpha$  которой совмещена с осью фазы  $a$ , а ось  $\gamma$  – с нормалью  $ON$ . Тогда ось  $\beta$  будет расположена в плоскости трехфазной системы сигналов под углом  $\pi/2$  относительно оси  $\alpha$  по направлению чередования фаз.

Таким образом, оси  $\alpha, \beta$  будут расположены в плоскости поперечного сечения (в плоскости магнитных осей) электрической машины, а ось  $\gamma$  – вдоль оси вала ротора.

Координаты вектора  $\vec{U}$  в системе  $\alpha, \beta, \gamma$  связаны с мгновенными значениями фазных величин  $u_a, u_b, u_c$  соотношением:

$$\vec{U}_{(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица прямого координатного преобразования системы трехфазных сигналов в проекции результирующего вектора  $\vec{U}$  на оси декартовой трехмерной системы координат  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Применительно к трехфазным электрическим машинам трёхмерность результирующего вектора трёхфазной линейно независимой системы сигналов предопределяет рассмотрение обобщенной электрической машины, в общем случае, трехмерным объектом, содержащим по три взаимно ортогональных обмотки на статоре и роторе (рис.4). При этом, магнитная связь между обмотками статора и ротора расположенными вдоль оси  $\gamma$  отсутствует.

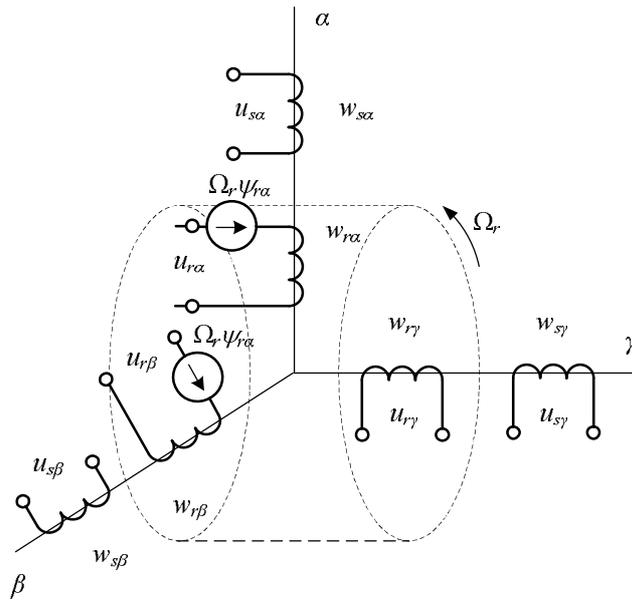


Рисунок 4 – Уточнённая модель обобщённой машины

Векторно-матричные дифференциальные уравнения электромагнитных контуров статора и ротора и векторно-матричные уравнения связи между магнитными и электрическими переменными такой обобщенной машины свидетельствуют о том, что уравнения, связывающие между собой координаты результирующих векторов по оси  $\gamma$ , являются полностью автономными. Эти координаты не зависят от других координат векторных переменных и на них не влияют.

Формулы электромагнитного момента электрической машины свидетельствуют о том, что проекции (координаты) результирующих векторов на ось  $\gamma$  также не участвуют и в формировании последнего.

Материалы данного раздела определяют методологию дальнейших исследований, суть которой заключается в следующем:

Уравнения, связывающие между собой проекции результирующих векторов на ось  $\gamma$ , без утраты общности результатов, либо не рассматриваются вовсе, либо, при необходимости, учитываются отдельно (дополнительно).

**Во втором разделе** обоснована процедура получения дифференциальных уравнений асинхронной машины в полярной системе координат.

Суть процедуры заключается в том, что все промежуточные выкладки выполняются с использованием показательной формы представления комплексных переменных математической модели асинхронной машины и только на этапе разделения уравнений АМ на вещественную и мнимую составляющие следует переходить к тригонометрической форме записи.

В результате разработан набор математических моделей асинхронной машины в виде систем дифференциальных уравнений и структурных схем для различных комбинаций векторных переменных.

Уравнения асинхронной машины в переменных  $\bar{i}_s - \bar{\psi}_r$  в полярных координатах имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
p i_s = - \left( \frac{r_s}{l'_s} + \frac{k_s \cdot k_r \cdot r_r}{l'_r} \right) \cdot i_s + \frac{k_r \cdot r_r}{l'_r \cdot l_r} \cdot \psi_r \cdot \cos(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}) - \frac{k_s}{l'_r} \cdot \omega \cdot \psi_r \cdot \sin(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}) \cdot \\
+ \frac{I}{l'_s} \cdot u_s \cdot \cos(\varphi_{us} - \varphi_{is}), \\
p \varphi_{is} = - \frac{k_r \cdot r_r}{l'_r \cdot l_r} \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \sin(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}) - \omega_k - \frac{k_s}{l'_r} \cdot \omega \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \cos(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}) + \\
+ \frac{I}{l'_s} \cdot \frac{u_s}{i_s} \cdot \sin(\varphi_{us} - \varphi_{is}), \\
p \psi_r = - \frac{r_r}{l_r} \cdot \psi_r + k_r \cdot r_r \cdot i_s \cdot \cos(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}), \\
p \varphi_{\psi r} = k_r \cdot r_r \cdot \frac{i_s}{\psi_r} \cdot \sin(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}) - \omega_k + \omega, \\
m_{\mathcal{D}} = k_r \cdot i_s \cdot \psi_r \cdot \sin(\varphi_{is} - \varphi_{\psi r}), \\
J p \omega = m_{\mathcal{D}} - m_C,
\end{array} \right. \quad (4)$$

где  $u_s, i_s, \psi_r, \varphi_{us}, \varphi_{is}, \varphi_{\psi r}$  – модули и, соответственно, аргументы результирующих векторов напряжения, тока статора и потокосцепления ротора;  $\omega_k, \omega, m_{\mathcal{D}}, m_C$  – скорости вращения координатной системы и ротора, электромагнитный момент двигателя, момент статического сопротивления;  $r_s, l'_s, k_s$  – активное сопротивление, эквивалентная индуктивность и коэффициент связи фазы обмотки статора;  $r_r, l_r, l'_r, k_r$  – активное сопротивление, полная и эквивалентная индуктивности и коэффициент связи фазы обмотки ротора приведенной к статору;  $J$  – момент инерции ротора.

Анализ моделей в полярных координатах свидетельствует о том, что они удобны для практического применения только при синхронизации скоростей вращения координатной системы и векторных переменных. В противном случае, аргументы векторных переменных (угловое положение соответствующих векторов относительно полярной оси системы координат) при выполнении вычислительного эксперимента (математическом моделировании процессов в асинхронной машине) могут неограниченно возрастать.

С целью устранения указанного неудобства предложено ввести в рассмотрение в качестве переменных состояния асинхронной машины вместо аргументов векторных переменных (угол между вектором и полярной осью) разность аргументов векторных переменных (угол между соответствующими векторами).

Разработана, обоснована и реализована методика выполнения такой замены. В результате, для различных комбинаций векторных переменных, получен набор математических моделей асинхронной машины инвариантных к скорости вращения системы координат. Для сочетания векторных переменных  $\bar{i}_s - \bar{\psi}_r$  такие уравнения имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
pi_s = - \left( \frac{r_s}{l'_s} + \frac{k_s \cdot k_r \cdot r_r}{l'_r} \right) \cdot i_s + \frac{k_r \cdot r_r}{l'_r \cdot l_r} \cdot \psi_r \cdot \cos \theta_{i_s \psi_r} - \\
- \frac{k_s}{l'_r} \cdot \omega \cdot \psi_r \cdot \sin \theta_{i_s \psi_r} + \frac{1}{l'_s} \cdot u_s \cdot \cos \theta_{u_s i_s}, \\
p\theta_{u_s i_s} = \omega_{u_s} + \frac{k_r \cdot r_r}{l'_r \cdot l_r} \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \sin \theta_{i_s \psi_r} + \frac{k_s}{l'_r} \cdot \omega \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \cos \theta_{i_s \psi_r} - \\
- \frac{1}{l'_s} \cdot \frac{u_s}{i_s} \cdot \sin \theta_{u_s i_s}, \\
p\psi_r = - \frac{r_r}{l_r} \cdot \psi_r + k_r \cdot r_r \cdot i_s \cdot \cos \theta_{i_s \psi_r}, \\
p\theta_{i_s \psi_r} = - \frac{k_r \cdot r_r}{l'_r \cdot l_r} \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \sin \theta_{i_s \psi_r} - \frac{k_s}{l'_r} \cdot \omega \cdot \frac{\psi_r}{i_s} \cdot \cos \theta_{i_s \psi_r} + \\
+ \frac{1}{l'_s} \cdot \frac{u_s}{i_s} \cdot \sin \theta_{u_s i_s} - k_r \cdot r_r \cdot \frac{i_s}{\psi_r} \cdot \sin \theta_{i_s \psi_r} - \omega, \\
m_{\mathcal{E}} = k_r \cdot i_s \cdot \psi_r \cdot \sin \theta_{i_s \psi_r}, \\
Jp\omega = m_{\mathcal{E}} - m_C.
\end{array} \right. \quad (5)$$

Для оценки работоспособности предложенных математических моделей и качества воспроизведения ими процессов в АМ в пакете прикладных математических программ MATLAB выполнены исследования различных режимов работы большого количества асинхронных машин серии 4А. Оценка качества моделирования выполнена в сравнении с результатами аналогичных исследований, полученных на моделях в декартовых координатах.

В результате установлено:

1. Работоспособность всех предлагаемых моделей достигается исключением возможности возникновения режима деления на ноль. Наиболее просто это обеспечивается введением пренебрежимо малых начальных значений модулей векторных переменных.

2. Рассмотренные математические модели асинхронной машины (кроме моделей в переменных  $\bar{i}_s - \bar{i}_r$ , где погрешности существенно выше) позволяют воспроизводить ее установившиеся и динамические режимы практически с той же точностью, что и модели в декартовых координатах. Мгновенные значения разностей скоростей  $\Delta\omega$  и моментов  $\Delta m_{\mathcal{E}}$ , рассчитанных на модели в декартовой системе координат и предлагаемых моделях для режима прямого пуска, не превышают для скорости 0,145%, а для момента 1,2% их базовых значений.

**Раздел 3** посвящен разработке и исследованию уточненных математических моделей АМ в полярных координатах, учитывающих насыщение главной магнитной цепи и эффект вытеснения тока ротора.

Учет насыщения выполнен согласно положений, изложенных в работах А.В. Фильца. Кривая намагничивания аппроксимирована полиномом седьмого порядка, вид и параметры которого определены в работах Р.Т. Шрейнера. Эффект вытеснения тока ротора учтен с помощью уравнений Ф. Эмде.

На базе принятых в работе подходов создано несколько вариантов математических моделей асинхронной машины в полярных координатах, учитывающих насыщение главной магнитной цепи и аналогичных моделей, учитывающих эффект вытеснения тока ротора.

В работе приведены математические модели на основе полной системы векторно-матричных уравнений электромагнитных контуров асинхронной машины (дифференциальные уравнения и уравнения связи) и модели на основе систем дифференциальных векторно-матричных уравнений, в которых часть промежуточных переменных исключена (уравнения в переменных  $\bar{\psi}_s - \bar{\psi}_r$  и  $\bar{i}_s - \bar{i}_r$ ).

Уточнённые математические модели в полярных координатах для комбинации векторных переменных  $\bar{i}_s - \bar{\psi}_r$  включают в себя уравнения (4) в которых постоянные коэффициенты представлены переменными множителями, зависящими либо от степени насыщения главной магнитной цепи машины:

$$\begin{aligned} r_{\text{э}} &= r_s + k_r^2 r_r + l_{r\sigma} p k_r, & l_{\text{э}} &= l_{s\sigma} + k_r l_{r\sigma}, \\ k_r &= \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{\psi_m(i_m)}{\psi_m(i_m) + l_{r\sigma} i_m}, \\ \alpha_r &= \frac{r_r}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{r_r i_m}{\psi_m(i_m) + l_{r\sigma} i_m}, \end{aligned} \quad (6)$$

либо от степени вытеснения тока ротора:

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}}, & k_r \cdot r_r &= \frac{l_m \cdot r_r}{l_m + l_{r\sigma}}, & \frac{r_r}{l_r} &= \frac{r_r}{l_m + l_{r\sigma}}, \\ l'_s &= (1 - k_s k_r) l_s = \frac{(l_{r\sigma} + (1 - k_s) l_m) l_s}{l_m + l_{r\sigma}} = f_3(l_{r\sigma}), \\ \frac{1}{l'_s} &= \frac{1}{f_3(l_{r\sigma})}, & \frac{r_{\text{э}} + p l'_s}{l'_s} &= \frac{r_s + k_r^2 r_r + p(f_3(l_{r\sigma}))}{f_3(l_{r\sigma})}, & \frac{k_r}{l'_s} &= \frac{k_r}{f_3(l_{r\sigma})}, \\ & & \left(\frac{r_r \cdot k_r}{l_r} + p k_r\right) / l'_s &= \left(\frac{r_r \cdot k_r}{l_r} + p k_r\right) / f_3(l_{r\sigma}). \end{aligned} \quad (7)$$

и, соответственно, уравнения, характеризующие или насыщение главной магнитной цепи:

$$\begin{aligned} \psi_m + l_{r\sigma} i_m &= \sqrt{(\psi_r \cos \varphi_{\psi_r} + l_{r\sigma} i_s \cos \varphi_{i_s})^2 + (\psi_r \sin \varphi_{\psi_r} + l_{r\sigma} i_s \sin \varphi_{i_s})^2}, \\ i_m &= f(\psi_m) = g_1 \psi_m + g_2 \psi_m^3 + g_3 \psi_m^5 + g_4 \psi_m^7, \end{aligned} \quad (8)$$

или эффект вытеснения тока ротора:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= r_r = r_{r.л} + r_{r.п} \left( \xi \frac{\text{sh} 2\xi + \sin 2\xi}{\text{ch} 2\xi - \cos 2\xi} \right), \\ f_2(\xi) &= l_{r\sigma} = l_{r.л} + l_{r.п} \left( \frac{3}{2} \frac{(\text{sh} 2\xi - \sin 2\xi)}{\xi (\text{ch} 2\xi - \cos 2\xi)} \right), \\ \xi &= h \sqrt{|\beta|}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\beta$  – частота тока ротора;  $h$  – обобщенный параметр, зависящий от материала

обмотки ротора и геометрии машины.

Уточненные математические модели в полярных координатах для полной системы уравнений, для других возможных комбинаций векторных переменных и уточненные модели инвариантные к скорости вращения системы координат имеют аналогичную структуру.

Результаты проведенных с помощью предлагаемых моделей исследований свидетельствует о том, что они успешно могут использоваться как для выявления структурных и аналитических взаимосвязей между переменными, так и, при обеспечении условий их работоспособности, для численных расчетов процессов в системах, содержащих трехфазные асинхронные машины.

Условия обеспечения работоспособности здесь те же, что и для моделей с постоянными параметрами.

Результаты моделирования не только совпадают с полученными с помощью подобных моделей в декартовых координатах, но и хорошо согласуются с результатами анализа влияния насыщения главной магнитной цепи и эффекта вытеснения тока ротора на характеристики асинхронной электрической машины представленными в литературных источниках.

Для иллюстрации сказанного, на рис.5-6 приведены рассчитанные с помощью предлагаемых моделей графики изменения скорости вращения ротора (рис.5) и электромагнитного момента (рис.6) при прямом пуске вхолостую асинхронного двигателя 4А160М4УЗ на номинальные параметры сети.

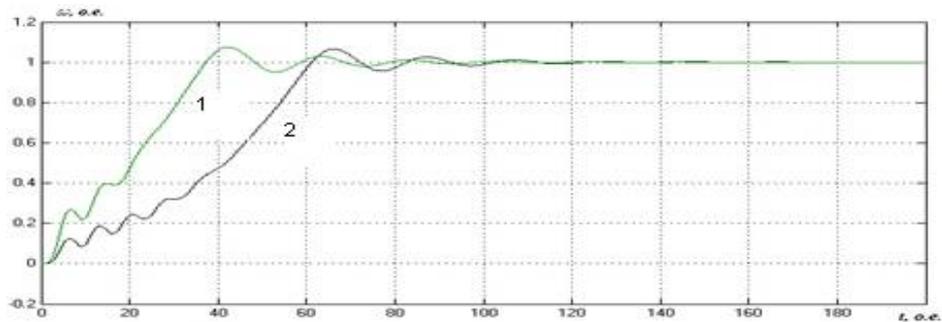


Рисунок 5 – Графики изменения скорости ротора при прямом пуске

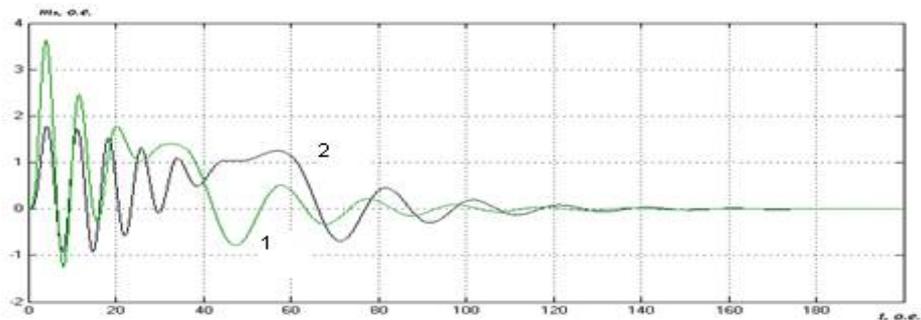


Рисунок 6 – Графики изменения электромагнитного момента при прямом пуске

Графики 1 получены на моделях, учитывающих вытеснение тока ротора, 2 – на моделях, учитывающих насыщение.

**В разделе 4** рассмотрен пример практического использования разработанных математических моделей асинхронной машины в полярных координатах для исследования режимов работы систем транспортирования жидкостей и газов.

Предложена достаточно универсальная функциональная схема такой системы (рис.7), позволяющая учесть, в том числе, ограниченную мощность питающего насосную станцию источника напряжения.

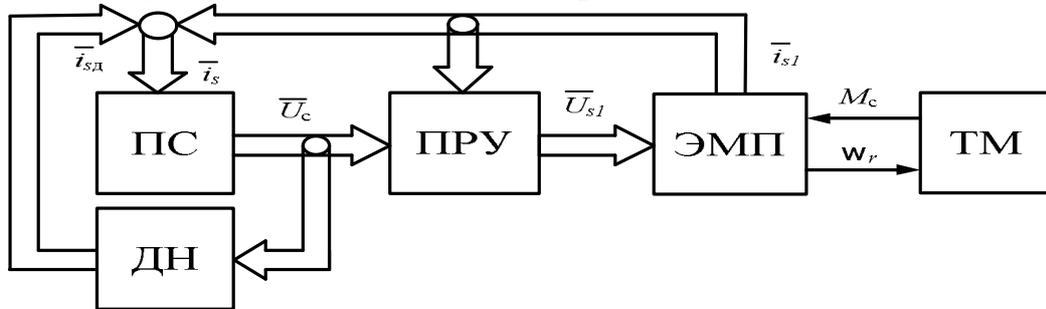


Рисунок 7 – Функциональная схема энерготехнологического комплекса трубопровода

Объект исследования здесь представлен структурой, состоящей из питающей сети (ПС), дополнительной нагрузки (ДН), пускорегулирующего устройства (ПРУ), электромеханического преобразователя энергии (ЭМП), трубопровода (ТМ).

Функциональная схема обеспечивает возможность исследовать различные режимы пуска и регулирования скорости двигателя насосов, анализировать различного уровня точности математические модели электроприводов и учитывать статические и динамические характеристики насоса, трубопровода и транспортируемого продукта.

Для иллюстрации практического использования разработанных математических моделей выполнено моделирование процессов прямого и плавного пуска асинхронного электропривода насоса транспортной системы при подключении его к сети ограниченной мощности. Для этого разработана математическая модель сети ограниченной мощности, в которой, согласно принятому в работе подходу, трехфазные переменные представлены полярными координатами соответствующих результирующих векторов.

Математическая модель устройства плавного пуска (УПП) разработана в трех вариантах. В первом варианте УПП представлено безынерционным звеном с переменным коэффициентом передачи в канале формирования модуля вектора (амплитуды) напряжения статора асинхронной машины.

Во втором варианте УПП представлено функциональными блоками, связывающими модуль и аргумент результирующего вектора напряжения сети с модулем и аргументом первой гармоники вектора выходного напряжения регулятора в функции угла (фазы) открытия тиристорных реверсивных ключей. Функциональные зависимости учитывают также влияние нагрузки на работу ключей регулятора.

Математическая модель третьего варианта наиболее полно учитывает дискретные свойства УПП и, с точностью принятых допущений, воспроизводит форму его выходных сигналов.

Асинхронный двигатель при моделировании представлен математической моделью в полярных координатах в переменных  $\bar{i}_s - \bar{\psi}_r$  в двух вариантах. В первом случае параметры двигателя приняты постоянными, во втором случае модель учитывает эффект вытеснения тока ротора.

Математическая модель трубопровода взята из литературных источников.

На основе функциональной схемы и математических моделей ее отдельных компонентов, согласно структурному методу моделирования, скомпонованы общие структурные схемы (математические модели) исследуемой системы.

На рис.8 приведены графики изменения скорости вращения вала двигателя (а) и электромагнитного момента (б) при плавном пуске от сети ограниченной мощности. Графики получены на модели, в которой УПП моделируется по третьему варианту, а модель двигателя учитывает вытеснение тока ротора.

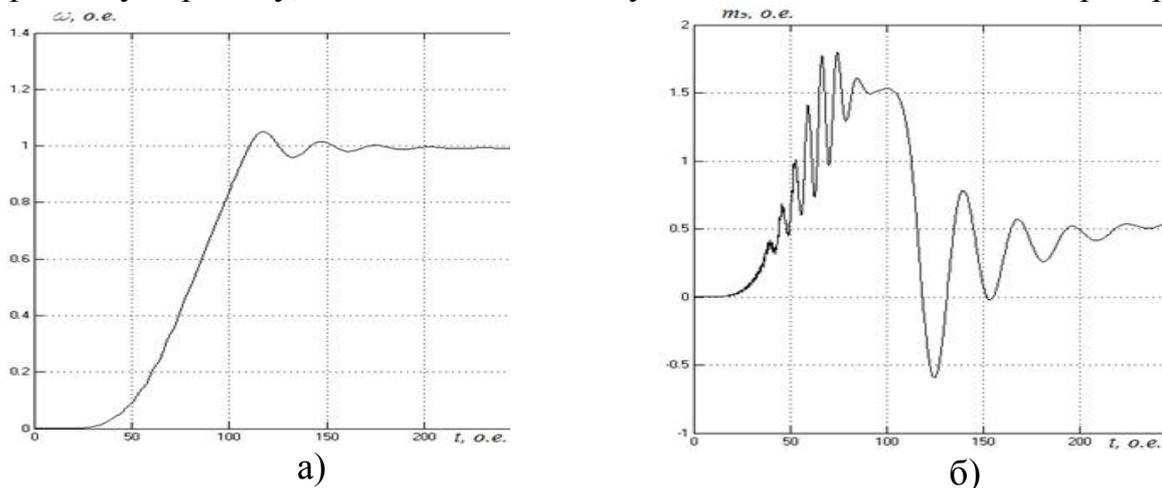


Рисунок 8 – Графики изменения скорости и момента при плавном пуске

Исследование режима плавного пуска показывает практически полное устранение ударных бросков момента при сохранении просадки сетевого напряжения. Кроме того, во время работы УПП, в токе, коэффициенте мощности, напряжениях появляется высокочастотная составляющая, которая может негативно влиять на работу других потребителей энергии.

Результаты моделирования подтверждают работоспособность предлагаемых математических моделей, обладают физической трактуемостью и качественно совпадают с результатами подобных исследований.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенных исследований получены следующие основные результаты:

1. Введено и обосновано понятие пространственного результирующего вектора для плоской трехфазной линейнонезависимой системы сигналов, координаты которого пропорциональны фазным сигналам, что позволило уточнить и расширить понятие обобщенной электрической машины, дополнив её перпендикулярными к плоскости поперечного сечения магнитонесвязанными об-

мотками на статоре и роторе. Благодаря этому появляется возможность дополнительно учесть нулевые составляющие трехфазных переменных состояния.

2. С учётом автономности уравнений, связывающих проекции результирующих векторов на ось  $\gamma$ , предложена, сохраняющая общность результатов, методология проведения исследований, заключающаяся в том, что уравнения координат результирующих векторов по оси  $\gamma$  либо не рассматриваются вовсе (полярная система координат), либо, при необходимости, учитываются отдельно (цилиндрическая система координат). Это позволило для математического анализа применить компактный, простой и наглядный математический аппарат комплексных функций.

3. Разработаны наборы математических моделей асинхронной машины в полярных координатах и моделей инвариантных к скорости вращения системы координат для различных сочетаний векторных переменных в случае:

- а) постоянства параметров АМ;
- б) учтено насыщения главной магнитной цепи;
- в) учтен эффект вытеснения тока ротора.

4. В результате исследования установлено, что математические модели в полярных координатах и математические модели инвариантные к скорости вращения системы координат, при обеспечении условий их работоспособности (исключение режима деления на ноль), воспроизводят установившиеся и динамические режимы АМ с той же точностью, что и подобные модели в декартовых координатах.

При этом замечено, что векторные и круговые диаграммы, широко используемые для анализа установившихся режимов асинхронной машины, характеризуют угловое положение некоторых векторных переменных с погрешностью кратной  $2\pi k$ , где  $k$  – целое число.

5. Разработанные математические модели энерготехнологического комплекса «питающая сеть – пускорегулирующая аппаратура – электромеханический преобразователь энергии – насос – трубопровод» в целом, математические модели составляющих его элементов, результаты моделирования и сформулированные на их основе рекомендации могут быть использованы при анализе и проектировании подобных систем и свидетельствуют о следующем:

а) предложенные подходы позволяют получать математические модели в полярных координатах не только асинхронных электрических машин, но и других объектов, содержащих трехфазные электрические цепи и характеризующихся трехфазными сигналами;

б) подтверждают возможность и эффективность использования математических моделей в полярных координатах для исследования процессов в сложных технических системах, содержащих трехфазные асинхронные электрические машины;

в) совпадение результатов моделирования с описанными в литературе результатами экспериментальных исследований подобных систем подтверждает достоверность проведенных исследований.

Проведенные исследования позволяют рекомендовать разработанные математические модели АМ в полярных координатах и модели инвариантные к скорости вращения системы координат для использования в инженерной и научной практике наряду с моделями в декартовых координатах.

**Научные публикации по теме диссертации в изданиях,  
рекомендованных ВАК**

1. Лазовский, Э. Н. Обобщенный (результатирующий) пространственный вектор плоской трехфазной линейнонезависимой системы сигналов / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский // Вестник СибГАУ им. академика М. Ф. Решетнева. – 2011. – № 2(35). – С.76–79.

2. Лазовский, Э. Н. Математические модели асинхронной машины с короткозамкнутым ротором в цилиндрической (полярной) системе координат / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский // Изв. вузов. Электромеханика. – 2012. – № 5. – С. 29–35.

3. Лазовский, Э. Н. Уравнения динамики асинхронной машины, инвариантные к скорости вращения системы координат / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский, М. А. Печатнов // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т.320, № 4. – С.142–146.

**Другие научные публикации по теме диссертации**

4. Лазовский, Э. Н. Уравнения динамики асинхронной машины, инвариантные к скорости вращения системы координат / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский, М. А. Печатнов // Электромеханические преобразователи энергии: Матер. V междунар. науч.-техн. конф. – Томск, 2011. – С.100–106.

5. Лазовский, Э. Н. Двухконтурная система регулирования модуля вектора потокосцепления ротора частотноуправляемого асинхронного электропривода / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский // Сб. докладов IV международной научно-практической конференции «Энергетика и энергоэффективные технологии». – Липецк: ЛГТУ, 2010.

6. Лазовский, Э. Н. Математические модели устройств плавного пуска асинхронных электроприводов / А. А. Федоренко, Э. Н. Лазовский // Управление и информатика в технических системах: материалы Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 80-летию Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, профессора, Б. П. Соустина. – Красноярск: ИКИТ СФУ, 2013. – С.38–42

7. Лазовский, Э. Н. Использование полярной системы координат для синтеза системы частотного управления асинхронным электроприводом / Е. А. Гуляев, Э. Н. Лазовский, В. И. Пантелеев, А. А. Федоренко // Евразийский союз ученых (ЕСУ). – 2015. – №4(13), Ч. 4. – С.41–44.

**Лазовский Эдуард Николаевич**

Математические модели асинхронной машины как компонента электропривода  
в полярных координатах  
Автореферат

Подписано в печать . Печать плоская. Формат 60x84/16

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ

Библиотечно-издательский комплекс Сибирского федерального университета

660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а Тел. (391) 206-26-67;

<http://bik.sfu-kras.ru> E-mail: [publishing\\_house@sfu-kras.ru](mailto:publishing_house@sfu-kras.ru)