На правах рукописи

Кручинин Дмитрий Владимирович

Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники».

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор Шелупанов Александр Александрович
Официальные оппоненты:	Грешнов Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», лаборатория геометрического анализа, ведущий научный сотрудник.
	Степаненко Виталий Анатольевич, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», кафедра высшей математики 1, доцент.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»

Защита состоится 20 мая 2016 г. в 13.30 часов часов на заседании диссертационного совета Д 999.040.02 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», ФГБУН Институт вычислительного моделирования СО РАН по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru/.

Автореферат разослан «____» апреля 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Бесконечные ряды и интегральные представления являются основным инструментом математического анализа со второй половины XVII века и все этапы его развития теснейшим образом связаны с развитием аппарата рядов и интегральных представлений. Создание техники использования рядов для решения математических и прикладных задач является одной из важнейших задач математического анализа. Методы анализа, использовавшиеся в классических трудах таких авторов, как А.А. Марков, Т.И. Стилтьес, С.Н. Бернштейн, Г. Сеге, A. Erdelyi, R.P. Boas и R.C. Buck, S. Roman, П.К. Суетин, породили в своем применении к различным объектам теорию классических ортогональных многочленов. Важным средством их описания являются производящие функции (производящие степенные ряды).

Существенный вклад в развитие современных методов теории производящих функций для решения задач перечислительного комбинаторного анализа внесли J. Riordan, L. Comtet, Дж. Эндрюс, H.S. Wilf, R. Stanley, P. Flajolet и R. Sedgewick, Н.Я. Виленкин, Г.П. Егорычев, В.Н. Сачков, С.К. Ландо и другие ученые. Большое значение для теории производящих функций специальных полиномов перечислительного комбинаторного анализа имели работы канадского математика H.M. Srivastava и турецкого математика Y. Simsek. Также из обширного количества исследований, связанных с производящими функциями для специальных полиномов, можно выделить работы таких авторов, как T. Kim, B. Kurt, M. El–Mikkawy.

Со времен Эйлера задача о разложении функций в степенной ряд рассматривалась как задача об отыскании явных формул для коэффициентов этого ряда. Во многих случаях для тех функций, для которых удается найти явное выражение для коэффициентов ряда, можно найти и другие, более громоздкие формулы для коэффициентов. Такие случаи являются богатым источником весьма нетривиальных тождеств. Ключевым моментом метода производящих функций полиномов является применение процесса обращения, который приводит в ряде задач к явным формулам.

Исследованиями в области получения явных выражений для специальных полиномов занимались, например, H.M. Srivastava, K.N. Boyadzhiev и M. Cenkci. Однако, единого и прямого метода получения явных выражений полиномов до настоящего времени не было предложено. Поэтому разработка метода получения явных выражений специальных полиномов на основе степеней производящих функций является актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы. Работа посвящена разработке методов оперирования производящими функциями специальных полиномов и их применениям к получению явных формул для некоторых классов специальных полиномов.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

- провести обзор литературы в области методик получения явных формул для специальных полиномов;
- получить новый метод вычисления коэффициентов степеней производящих функций;
- применить разработанный метод к известным специальным полиномам, заданным производящими функциями.

Научная новизна. Основные результаты диссертационного исследования являются новыми и состоят в следующем:

- разработан метод получения явных формул для коэффициентов разложения в ряд степеней производящих функций, в частности, найдены формулы для коэффициентов степеней взаимных, обратных, суммы, произведения и композиции производящих функций;
- на основе разработанного метода получены явные формулы для полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера и для многомерных обобщенных полиномов Эрмита;
- найдена производящая функция для обобщенных полиномов Мотта, учитывающая использование тригонометрических функций и явная формула, позволяющая эффективно вычислить значения коэффициентов полиномов Мотта.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области математического анализа, перечислительного комбинаторного анализа, математической физики и математической статистики. Большая часть результатов может служить основой для дальнейших исследований в теории производящих функций специальных полиномов, использоваться при решении функциональных и дифференциальных уравнений, задач комбинаторики, защиты информации и в математической физике. Материалы диссертации могут быть использованы для спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, комбинаторики, математической физики, предназначенных для магистров и аспирантов высших учебных заведений. Таким образом, исследования в направлении, намеченном в диссертации, могут быть продолжены.

Полученные результаты внедрены в учебный процесс ТУСУРа: в практические занятия по дисциплинам «Математический анализ» и «Дискретная математика».

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, теневого анализа, теории степенных рядов, а также методы декомпозиции производящих функций.

Положения, выносимые на защиту:

- разработан метод, позволяющий найти явные формулы для коэффициентов степеней производящих функций, полученных с помощью операций сложения, умножения, композиции и обращения;
- для полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера и для многомерных обобщенных полиномов Эрмита получены явные формулы;
- для обобщенных полиномов Мотта, имеющих производящую функцию $e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha, x)\frac{t^n}{n!}$ найдена явная формула, учитывающая использование тригонометрических функций.

Степень достоверности и апробация результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое обоснование.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- международная научная конференции «10th International conference of numerical analysis and applied mathematics» (сентябрь 2012 г., Греция);
- международная научная конференция «Commutative ring theory, integer-valued polynomials and polynomial functions» (декабрь 2012 г., технологический университет города Грац, Австрия);
- международная научная конференция «Palanga conference in combinatorics and number theory» (сентябрь 2013 г., Вильнюсский университет, Литва);
- всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного университета и 65-летию механико-математического факультета (октябрь 2013 г., НИ ТГУ, Томск);
- международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (ноябрь 2013 г., Институт математики НАН Беларусь);
- международная научная конференция «International conference on recent advances in mathematics» (январь 2014 г., PTM университет города Нагпур, Индия);
- международная научная конференция «International congress in honour of professor Ravi P. Agarwal» (июнь 2014 г., университет города Улудаг, Турция);
- международная научная конференция «International Indian statistical association (IISA) conference» (июль 2014 г., Калифорнийский университет в Риверсайде, США, докладчик профессор Алан Криник);

- томский IEEE-семинар «Интеллектуальные системы моделирования, проектирования и управления» под руководством профессора А.А. Шелупанова (2012–2014 гг., ТУСУР, Томск).

Полученные результаты были апробированы в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей **«www.oeis.org»**. Зарегистрировано более 10 новых последовательностей и добавлено 18 оригинальных формул.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в соответствии с государственным заданием ТУСУР № 1220 2014 года, государственным заданием ТУСУР № 3657 2015-2016 годов. Также работа была поддержана двумя тревел-грантами: грант РФФИ № 12-01-09350 2012 года по конкурсу моб–з «Конкурс научных проектов молодых ученых для представления на научных мероприятиях, проводимых за рубежом», который позволил принять участие в конференции «10th international conference of numerical analysis and applied mathematics»; грант ТУСУРа 2012 года «Совершенствование и развитие внутрироссийской и международной мобильности аспирантов и молодых научно-педагогических работников ТУСУРа», который позволил принять участие в конференции «Commutative ring theory, integer-valued polynomials and polynomial functions».

Публикации и личный вклад. Материалы диссертации опубликованы в 13 печатных работах, в том числе в одной монографии [1], в 10 статьях рецензируемых журналов [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11],из них 9 статей в изданиях из перечня ВАК (6 в изданиях, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science) и в 2 тезисах [12, 13].

Личный вклад автора. Все основные результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору. Из совместных публикаций в диссертацию включен лишь материал, полученный автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации 97 страниц. Список литературы включает 92 наименование, в том числе 13 работ автора по теме диссертации.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов.

В первой главе дан аналитический обзор литературных данных по теории специальных полиномов. Приведены примеры применения некоторых полиномов в различных областях математики и физики. В главе описаны пути задания полиномов. Показано, что производящие функции являются важным элементом задания специальных полиномов. Проведен анализ литературных данных в области исследования производящих функций специальных полиномов. Также приведена классификация производящих функций полиномов. В главе проанализированы следующие варианты получения производящих функций из выражений полиномов: техника перегруппировки рядов, техника декомпозиции, операторные методы и теневой анализ. Рассмотрены результаты в области получения явных формул для полиномов, которые показали, что единого и прямого метода в получении явных формул для полиномов до настоящего времени не было предложено.

Выводы по первой главе: необходимость разработки методов получения явных формул для специальных полиномов заключается в отсутствии подобных способов в настоящее время. Направление развито слабо и единого подхода в получении явных формул для полиномов не предложено. Производящие функции являются важным элементом задания специальных полиномов. Поэтому разработка метода получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций является актуальной и востребованной математической задачей.

Во второй главе автором предлагается подход к определению коэффициентов степеней производящих функций.

В разделе 2.1 проанализированы литературные данные в области исследования коэффициентов степеней производящих функций. Выявлено, что многие исследования, связанные с производящими функциями, используют коэффициенты степеней производящих функций, однако, как самостоятельный объект исследования в известных работах не рассматриваются.

Дается определение k-й степени производящей функции. Рассматривается случай коэффициентов $F(n,k)$ для степеней производящих функций вида $F(x)^k = \sum_{n\geq 0} F(n,k)x^n$, у которых $F(0) = 0$. Эти коэффициенты названы композитами.

Определение 1. *Композитой производящей функции* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ *порядка* k *называется последовательность из коэффициентов производящей функции* $F(x)^k$. *Композита обозначается* $F^{\Delta}(n,k)$.

Для производящей функции вида $A(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)x^n$, где $A(0) \neq 0$, коэффициенты производящей функции $A(x)^k$ обозначаются $A(n,k)$.

Композита $F^{\Delta}(n,k)$ производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$ также представляется на основе композиций натурального числа n:

$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{\pi_k \in C_n} f(\lambda_1)\, f(\lambda_2)\, \cdots\, f(\lambda_k), \tag{1}$$

где C_n — множество всех композиций π_k натурального числа n; т.е. представлений $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$ из k слагаемых.

В разделе 2.2 приводятся основные правила вычисления композит и операции сдвига, сложения, умножения композит и определения взаимных композит.

Для производящей функции $A(x) = \sum_{n\geq 0} a(n)x^n$, такой что $\left[A(x)\right]^k = \sum_{n\geq 0} A(n,k)x^n$, выполняются

- композита производящей функции $F(x) = xA(x)$ вычисляется по формуле
$$F^{\Delta}(n,k) = A(n-k,k);$$
- композита производящей функции $F(x) = \left[A(x) - a(0)\right]$ вычисляется по формуле
$$F^{\Delta}(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} A(n,j)(-1)^{k-j}\, a(0)^{k-j}.$$

Для производящей функции $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, такой что $\left[F(x)\right]^k = \sum_{n\geq k} F^{\Delta}(n,k)x^n$, выполняются

- композита производящей функции $A(x) = \left[F(x)\right]^m$ вычисляется по формуле
$$A^{\Delta}(n,k) = \begin{cases} F^{\Delta}(n,mk), & mk \leqslant n; \\ 0, & mk > n; \end{cases}$$
- композита производящей функции $A(x) = \alpha F(x)$, где α константа, вычисляется по формуле
$$A^{\Delta}(n,k) = \alpha^k F^{\Delta}(n,k);$$
- композита производящей функции $A(x) = F(\alpha x)$, где α константа, вычисляется по формуле
$$A^{\Delta}(n,k) = \alpha^n F^{\Delta}(n,k).$$

Для производящих функций $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, $B(x) = \sum_{n\geq 0} b(n)x^n$ и $G(x) = \sum_{n>0} g(n)x^n$, таких что $\left[F(x)\right]^k = \sum_{n\geq k} F^{\Delta}(n,k)x^n$, $\left[B(x)\right]^k = \sum_{n\geq 0} B(n,k)$ и $\left[G(x)\right]^k = \sum_{n\geq k} G^{\Delta}(n,k)x^n$, выполняются

- композита производящей функции $A(x) = F(x)B(x)$ вычисляется по формуле
$$A^{\Delta}(n,k) = \sum_{i=k}^{n} F^{\Delta}(i,k)B(n-i,k);$$
- композита производящей функции $A(x) = F(x) + G(x)$ вычисляется по формуле
$$A^{\Delta}(n,k) = F^{\Delta}(n,k) + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} \sum_{i=j}^{n-k+j} F^{\Delta}(i,j)G^{\Delta}(n-i,k-j) + G^{\Delta}(n,k).$$

Далее рассматривается применение композит для вычисления композиции обыкновенных производящих функций.

Показано, что для коэффициентов композиции производящих функций $A(x) = R(F(x))$, где $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, $R(x) = \sum_{n\geq 0} r(n)x^n$, верно выражение

$$a(0) = r(0),$$

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} F^{\Delta}(n,k)r(k). \tag{2}$$

Далее рассматривается задача нахождения композиты взаимной производящей функции.

Определение 2. *Взаимными производящими функциями называются функции, удовлетворяющие условию*

$$A(x)B(x) = 1. \tag{3}$$

Задача ставится так: зная композиту $x\,B(x)$, необходимо найти композиту $x\,A(x) = \dfrac{x}{B(x)}$.

Для получения композит взаимных производящих функций справедливо выражение

$$A^{\Delta}(n,m) = \begin{cases} \dfrac{1}{B^{\Delta}(1,1)^m}, & n = m; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-m} \binom{m+k-1}{m-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^j \binom{k}{j}}{B^{\Delta}(1,1)^{m+j}} B^{\Delta}(n-m+j, j), & n > m. \end{cases} \tag{4}$$

В разделе 2.3 решается задача нахождения композиты обратной производящей функции и как следствие задача нахождения коэффициентов обратных производящих функций.

Дается определение.

Определение 3. *Обратной производящей функцией от производящей функции* $F(x) = \sum_{n>0} f(n)x^n$, *где* $f(1) \neq 0$, *называется производящая функция* $\overline{F(x)}$, *удовлетворяющая условию*

$$F(\overline{F(x)}) = x. \tag{5}$$

Для получения композиты обратной производящей функции найдена следующая формула

$$B^{\Delta}(n,m)=\begin{cases}\dfrac{1}{F^{\Delta}(1,1)^{n}}, & n=m;\\ \dfrac{m}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-m}\binom{n+k-1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{(-1)^{j}}{F^{\Delta}(1,1)^{n+j}}\binom{k}{j}F^{\Delta}(n-m+j,j), & n>m.\end{cases} \tag{6}$$

Откуда для производящей функции $F(x)=\sum_{n>0}f(n)x^{n}$ с $f(1)=1$ коэффициенты обратной производящей функции определяются следующей формулой

$$b(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}F^{\Delta}(n+j-1,j), & n>1.\end{cases} \tag{7}$$

Выводы по второй главе: предлагаемый подход к определению коэффициентов степеней производящих функций является новым. Он имеет принципиальное отличие в том, что рассматриваются коэффициенты степеней производящих функций, у которых нулевой член равен 0, что позволяет определить для них операции сложения, умножения, композиции, формулы для взаимных, обратных производящих функций и обеспечивает решение поставленных задач.

Результаты второй главы опубликованы в статьях [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12] и в монографии [1].

Третья глава посвящена вопросам доказательства достоверности результатов и применению разработанных математических методов для получения известных явных формул для полиномов Чебышева первого и второго родов, полиномов Лежандра, полиномов Гегенбауэра, полиномов Абеля, полиномов Эйлера, также получены новые явные формулы для полиномов Бернулли второго рода, обобщенных полиномов Бернулли, обобщенных полиномов Лагерра, обобщенных Голдом и Хоппером полиномов Эрмита и обобщенных полиномов Хумберта.

Получены новые явные формулы и оригинальные явные представления для многомерных обобщенных полиномов Эрмита, полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча и Махлера.

Теорема 1. *Для многомерных обобщенных полиномов Эрмита явная формула принимает следующий вид*

$$\begin{aligned}{}^{(m)}H_{n}(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\Big(F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1)G^{\Delta}(n,k,y,m)+\\ +\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\sum_{i=j}^{n-k+j}F^{\Delta}(i,j,2x,2,-1)G^{\Delta}(n-i,k-j,y,m)\Big),\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$G^{\Delta}(n,k,y,m)=\begin{cases}\binom{k}{\frac{n-km}{m}}(-1)^{\frac{n-km}{m}}(2y)^{2k-\frac{n}{m}}, & \frac{n-mk}{m}\in\mathbb{N},\\ 0, & \textit{иначе}.\end{cases}$$

$$F^{\Delta}(n,k,2x,2,-1)=\binom{k}{n-k}(2x)^{2k-n}(-1)^{n-k}.$$

Теорема 2. *Пусть дана производящая функция для полиномов Стирлинга*

$$\sum_{n\geqslant 0}S_n(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{t}{1-e^{-t}}\right)^{x+1}, \tag{9}$$

где $S_n(x)$ полиномы Стирлинга. Тогда для $S_n(x)$ справедливы следующие формулы

$$S_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{k!}\begin{bmatrix}k\\ m\end{bmatrix}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{k+j+n+m}}{(n+j)!}\binom{k}{j}\begin{Bmatrix}n+j\\ j\end{Bmatrix}\right)(x+1)^m \tag{10}$$

и

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+x}{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{j!(-1)^{n+j}}{(n+j)!}\binom{k}{j}\begin{Bmatrix}n+j\\ j\end{Bmatrix}, \tag{11}$$

где $\begin{bmatrix}k\\ m\end{bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix}n+j\\ j\end{Bmatrix}$ числа Стирлинга первого и второго родов, соответственно.

Теорема 3. *Пусть дана производящая функция для полиномов Петерса*

$$\left[1+(1+t)^{\lambda}\right]^{-\mu}(1+t)^x=\sum_{n\geqslant 0}s_n(x,\lambda,\mu)\frac{t^n}{n!}, \tag{12}$$

где $s_n(x,\lambda,\mu)$ полиномы Петерса. Тогда для $s_n(x,\lambda,\mu)$ справедливы следующие формулы

$$s_n(x,\lambda,\mu)=2^{-\mu}\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(-\mu)^i\sum_{m=i}^{n}2^{-m}\sum_{k=m}^{j}\begin{Bmatrix}k\\ m\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}j\\ k\end{bmatrix}\lambda^k\begin{bmatrix}m\\ i\end{bmatrix}\right)\times$$
$$\times\binom{n}{j}\sum_{l=0}^{n-j}\begin{bmatrix}n-j\\ l\end{bmatrix}x^l \tag{13}$$

и

$$s_n(x,\lambda,\mu)=n!\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{2^{k+\mu}}\binom{\mu+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{j\,\lambda}{i}\binom{x}{n-i}, \tag{14}$$

где $\begin{bmatrix}j\\ k\end{bmatrix}$ и $\begin{Bmatrix}k\\ m\end{Bmatrix}$ числа Стирлинга первого и второго родов, соответственно.

Теорема 4. *Пусть дана производящая функция для полиномов Наруми*

$$\left[\frac{t}{\ln(1+t)}\right]^{\alpha}(1+t)^{x}=\sum_{n\geq 0}s_n(x,\alpha)\frac{t^n}{n!},\tag{15}$$

где $s_n(x,\alpha)$ полиномы Наруми. Тогда для $s_n(x,\alpha)$ справедливы следующие формулы

$$S_n(x,\alpha)=\sum_{i=0}^{n}i!\sum_{m=0}^{i}(-\alpha)^m\sum_{k=m}^{i}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{k}\frac{\begin{bmatrix}i+j\\i\end{bmatrix}(-1)^{j-k}}{(j+i)!\,(k-j)!}\binom{n}{i}\sum_{l=0}^{n-i}\begin{bmatrix}n-i\\l\end{bmatrix}x^l\tag{16}$$

и

$$S_n(x,\alpha)=n!\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{k+\alpha-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j\,j!\,\begin{bmatrix}i+j\\j\end{bmatrix}\binom{k}{j}}{(j+i)!}\right)\binom{x}{n-i},\tag{17}$$

где $\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}$ числа Стирлинга первого рода.

Теорема 5. *Пусть дана производящая функция для полиномов Лерча*

$$(1-x\ln(1+t))^{-\lambda}=\sum_{n\geqslant 0}\Phi_n(x,\lambda)t^n,\tag{18}$$

где $\Phi_n(x,\lambda)$ полиномы Лерча. Тогда для $\Phi_n(x,\lambda)$ справедлива следующая формула

$$\Phi_n(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+\lambda-1}{k}\frac{k!}{n!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k,\tag{19}$$

где $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ числа Стирлинга первого рода.

Теорема 6. *Пусть дана производящая функция для полиномов Махлера*

$$e^{x(1+t-e^t)}=\sum_{n\geqslant 0}s_n(x)\frac{t^n}{n!},\tag{20}$$

где $s_n(x)$ полиномы Махлера. Тогда для $s_n(x)$ справедлива следующая формула

$$s_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{k-j}\left\{\begin{matrix}n-k+j\\j\end{matrix}\right\}\right),\tag{21}$$

где $\left\{\begin{matrix}n-k+j\\j\end{matrix}\right\}$ числа Стирлинга второго рода.

Также автором получено обобщение полиномов Мотта, позволяющее применять найденное выражение для тригонометрических функций:

$$e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha,x)\frac{t^n}{n!}. \tag{22}$$

Для полученного обобщения найдены оригинальные явные формулы.

Теорема 7. *Для обобщенных полиномов Мотта $s_n(\alpha,x)$, заданных производящей функцией*

$$e^{x((1-t^2)^\alpha-1)/t} = \sum_{n\geq 0} s_n(\alpha,x)\frac{t^n}{n!},$$

справедливы следующие явные формулы:

$$s_n(\alpha,x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{1+(-1)^{n+k}}{2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{j\alpha}{(n+k)/2}(-1)^{k-j+(n+k)/2}x^k \tag{23}$$

и

$$s_n(\alpha,x) = n!\sum_{m=1}^{n} m!\sum_{k=m}^{n}\frac{1+(-1)^n}{2\,k!}\left\{{k \atop m}\right\}\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha j}{\frac{n+k}{2}}\binom{k}{j}(-1)^{k-j+\frac{n+k}{2}}\binom{x}{m}, \tag{24}$$

где $n>0$ и $\left\{{k \atop m}\right\}$ числа Стирлинга второго рода.

На основе формулы для композиты обратной производящей функции автором получены новые тождества для полиномов Мотта и полиномов Бернулли:

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n-m}F^{\Delta}(n-m,k,\alpha)(-1)^k\frac{n^k}{k!}x^k\,\frac{s(m-1,\alpha)}{k!} = 0$$

и

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2\binom{2\,n}{k+1}B_k(x)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j-n\,x)^{2\,n-k-1} = 0,$$

где $n>1$.

Еще одним способом доказано тождество Теппера

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(j+x)^n = n!.$$

Выводы по третьей главе: для доказательства достоверности результатов в данной главе показано применение введенного математического аппарата для получения известных явных формул для полиномов Чебышева первого и второго родов, полиномов Лежандра, полиномов Гегенбауэра, полиномов Абеля, полиномов Эйлера. Также получены новые явные формулы для полиномов

Бернулли второго рода, обобщенных полиномов Бернулли, обобщенных полиномов Лагерра, обобщенных Голдом и Хоппером полиномов Эрмита и обобщенных полиномов Хумберта.

Найдены новые явные формулы и оригинальные явные представления для многомерных обобщенных полиномов Эрмита, полиномов Стирлинга, полиномов Петерса, полиномов Наруми, полиномов Лерча и полиномов Махлера.

Получено обобщение полиномов Мотта, позволяющее применять найденную формулу для тригонометрических функций, также для полученного обобщения найдена оригинальная явная формула. На основе формулы для композиты обратной производящей функции получены новые тождества для полиномов Мотта и для полиномов Бернулли. Еще одним способом доказано тождество Теппера.

Результаты третьей главы опубликованы в статьях [8, 9, 10, 11, 13] и в монографии [1].

В Заключении приводятся основные теоретические и практические результаты диссертации.

Заключение

1. Разработан новый подход для вычисления коэффициентов степеней производящих функций, который позволяет определить для них операции сложения, умножения, композиции и найти формулы для обратных и взаимных производящих функций.

2. Предлагаемый аппарат оперирования с коэффициентами степеней производящих функций позволил получить новые явные формулы для ряда классических специальных полиномов (Чебышева, Лежандра, Абеля и др.) и некоторых их обобщений.

3. Найдены обобщения полиномов Мотта и явная формула для их представления. Кроме того, доказаны новые тождества для полиномов Мотта и Бернулли и дано новое доказательство тождества Теппера.

4. Результаты диссертации внедрены в учебный процесс ТУСУРа: в практические занятия по дисциплинам «Математический анализ» и «Дискретная математика».

Список основных публикаций автора

1. Кручинин В. В., Кручинин Д. В. Степени производящих функций и их применение. Томск: Изд-во ТУСУР, 2013. 236 с.
2. Kruchinin V. V., Kruchinin D. V. Composita and its properties // Journal of Analysis and Number Theory. 2014. Vol. 2(2). P. 1–8.
3. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. A method for obtaining generating function for central coefficients of triangles // Journal of Integer Sequences. 2012. Vol. 15. P. 1–10.
4. Kruchinin D. V. On solving some functional equations // Advances in Difference Equations. 2015. Vol. 17. P. 1–7.
5. Кручинин Д. В. О свойствах коэффициентов суперпозиции некоторых производящих функций // Прикладная дискретная математика. 2012. Т. 1(15). С. 55–59.
6. Кручинин Д. В., Кручинин В. В. Метод построения алгоритмов проверки простоты натуральных чисел для задач защиты информации // Доклады ТУСУРа. 2011. Т. 2(24). С. 247–251.
7. Кручинин Д. В. Метод построения рекуррентных вероятностных генераторов простых чисел // Доклады ТУСУРа. 2012. Т. 1(25). С. 131–135.
8. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. A method for obtaining expressions for polynomials based on a composition of generating functions // Numerical Analysis and Applied Mathematics ICNAAM 2012. AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1479. P. 383–386.
9. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. Application of a composition of generating

functions for obtaining explicit formulas of polynomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013. Vol. 404. P. 161–171.

10. Kruchinin D. V., Kruchinin V. V. Explicit formulas for some generalized polynomials // Appl. Math. Inf. Sci. 2013. Vol. 7(5). P. 2083–2088.
11. Kruchinin D. V. Explicit formula for generalized Mott polynomials // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 24 (3). P. 327–332.
12. Кручинин Д. В., Кручинин В. В., Шелупанов А. А. Коэффициенты степеней производящих функций и их приложение к решению задач дискретной математики // Дискретная математика, теория графов и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 11 – 14 ноября 2013 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2013. С. 57.
13. Кручинин Д. В., Кручинин В. В. Тождества на основе производящей функции для полиномов Бернулли // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 135-летию Томского государственного универ- ситета и 65-летию механико-математического факультета: Сборник тезисов. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2013. 244 с.

Научное издание

Кручинин Дмитрий Владимирович

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук на тему:
Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней
производящих функций

Подписано в печать 01.03.2016. Тираж 100 экз. Заказ 154.

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
634050, г. Томск, пр. Ленина, 40. Тел. (3822) 533018.