На правах рукописи

Ефремов Илья Александрович

Автомодельные решения иерархии моделей дальнего турбулентного следа

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении Высшего профессионального образования "Сибирский федеральный университет"

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Капцов Олег Викторович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Царев Сергей Петрович** кандидат физико-математических наук **Родионов Александр Алексеевич**
Ведущая организация:	Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится 02 апреля 2010 года в : ч. на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, корпус Ж, ауд. 1-15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета (г. Красноярск, ул. Киренского, 26).

Автореферат разослан « » 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета К.А. Кириллов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований. Моделирование турбулентности - это одна из наиболее сложных и нерешенных проблем в гидродинамике и теоретической физике. В настоящее время существует достаточно большое количество полуэмпирических математических моделей, которые с различной степенью приближения описывают турбулентность в жидкостях и газах. Это градиентные модели (модели первого приближения), дифференциальные модели (модели второго приближения), а также модели, в которых учитываются уравнения на третьи моменты. Широкая распространенность турбулентных течений, их большое значение для множества разнообразных практических задач и интерес к ним теоретиков говорит об актуальности исследований в этом направлении. Для нахождения решений данных моделей обычно применяются конечно-разностные алгоритмы. Представляет большой интерес редуцировать системы уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям и построить решения полученных систем, которые удовлетворительно согласовываются с экспериментальными данными.

Цель диссертационной работы:
– провести групповой анализ моделей турбулентности в однородной и в пассивно стратифицированной среде в приближении дальнего следа;
– получить представления для инвариантных решений, построить решения редуцированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, провести сравнение полученных решений с экспериментальными данными.

Научная новизна работы. В диссертации построены и исследованы автомодельные решения иерархии моделей дальнего турбулентного следа. Выполнен теоретико-групповой анализ соответствующих моделей. Построенные автомодельные решения удовлетворяют всем граничным условиям. Найдены первые интегралы редуцированных систем. Полученные решения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными на качественном и количественном уровнях.

Теоретическая и практическая ценность работы. Найдены базисы допускаемых алгебр Ли операторов, позволяющие найти преобразования для перехода от систем уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены первые интегралы для некоторых рассмотренных систем и построены решения редуцированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих естественным краевым условиям. Полученные решения адекватно описывают наблюдаемые процессы на качественном и количественном уровне. Предложенные подходы и варианты решений могут использоваться в теории и практике при моделировании и описании природы дальнего турбулентного следа.

Личное участие автора в получении представленных научных результатов. Все результаты, включенные в диссертацию, принадлежат лично автору. В совместных работах вклад соавторов равнозначен.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались:
– на VI международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике"(Новосибирск, 2005);
– на VII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2006);
– на VIII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2007);
– на международной конференции "Потоки и структуры в жидкостях" (Санкт-Петербург, 2007);
– на международной конференции "Алгебра и ее приложения" (Красноярск, 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 статьях [1–4], 2 из них – в журналах из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка используемых литературных источников. Работа изложена на 97 страницах, иллюстрируется 25 рисунками. Список цитируемой литературы включает 55 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, представлена научная новизна и практическая значимость работы. **В первой главе**, в разделе 1.1, представлен ряд полуэмпирических моделей турбулентности в однородной и в пассивно стратифицированной среде. В разделе 1.2 приведены "упрощенные" модели в приближении дальнего турбулентного следа. В разделе 1.3 для всех рассматриваемых моделей выполняется теоретико-групповой анализ. Рассматривается $(k - \varepsilon)$ модель в приближении дальнего турбулентного следа, которая имеет следующий вид

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$u_0 \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \tag{1}$$

$$u_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s \frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 1} c_\mu k \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k},$$

где u_0 – скорость набегающего потока, u – дефект скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, c_μ, $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_ε – эмпирические константы; $s = 0$ для плоского течения и $s = 1$ в осесимметричном случае. В дальнейшем будем считать скорость набегающего потока равной единице.

Для системы (1) формулируется и доказывается следующая теорема о базисах допускаемой алгебры Ли.

Теорема 1 *Система (1) в плоском случае допускает пятимерную алгебру Ли операторов, базис которой состоит из трех операторов переноса и двух операторов растяжения. В осесимметричном случае – четырехмерную алгебру Ли, базис которой содержит два оператора переноса и два оператора растяжения.*

Базис допускаемой алгебры Ли операторов для плоского случая состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

$$X_5 = y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

и для осесимметричного случая из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

$$X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Далее рассматривается трехпараметрическая $(k - \varepsilon - \overline{u_i'u_j'})$ модель в приближении дальнего турбулентного следа вида

$$u_0\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s w\right),$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right) + w\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon, \tag{2}$$

$$u_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}w\frac{\partial u}{\partial y} - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k},$$

$$u_0\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_s\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - sc_s\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{w}{y^2} - \frac{\varepsilon}{k}c_{f1}w + c_{f2}k\frac{\partial u}{\partial y},$$

где u_0 – скорость набегающего потока, u – дефект скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $w = \overline{u'v'}$ – напряжение Рейнольдса, c_μ, $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_ε, c_s, c_{f1}, c_{f2} – эмпирические константы; $s = 0$ для плоского течения и $s = 1$ в осесимметричном случае.

Для системы (2) также формулируется и доказывается теорема о базисах допускаемой алгебры Ли.

Теорема 2 *Система (2) в плоском случае допускает пятимерную алгебру Ли операторов, базис которой состоит из трех операторов переноса и двух операторов растяжения. В осесимметричном случае – четырехмерную алгебру Ли, базис которой содержит два оператора переноса и два оператора растяжения.*

Базис допускаемой алгебр Ли операторов для плоского случая состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - 2w\frac{\partial}{\partial w}, \tag{3}$$

$$X_5 = y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + 2w\frac{\partial}{\partial w};$$

и для осесимметричного случая из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - 2w\frac{\partial}{\partial w}, \tag{4}$$

$$X_4 = y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + 2w\frac{\partial}{\partial w}.$$

В плоском случае X_1, X_2, X_3 – операторы переноса по x, y, u соответственно, а X_4, X_5 – операторы растяжения по x и y. В осесимметричном случае оператор переноса по y отсутствует.

В разделе 1.3 найдены базисы допускаемых алгебр Ли для других рассматриваемых моделей. Для модифицированной $(k - \varepsilon - \overline{u_i' u_j'})$ модели в приближении дальнего турбулентного следа базисы допускаемых алгебр Ли совпадают с базисами (3), (4) для трехпараметрической $(k-\varepsilon-\overline{u_i' u_j'})$ модели в приближении дальнего турбулентного следа. Также строятся базисы допускаемых алгебр Ли для модели третьего порядка в приближении дальнего следа.

Наряду с движением однородной жидкости большой практический интерес представляет случай так называемых стратифицированных потоков, то есть движения температурнонеоднородных или разноплотностных сред. Далее будут рассматриваться пассивно стратифицированные среды, то есть среды, где присутствует стратификация, но без учета сил тяжести. Для описания плоского турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде привлекается следующая математическая модель

$$u_0\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{5}$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right) + w\frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon, \tag{6}$$

$$u_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon}{k}\left(c_{\varepsilon 1} w\frac{\partial u}{\partial y} - c_{\varepsilon 2}\varepsilon\right), \tag{7}$$

$$u_0\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(c_s \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - c_{f1}\frac{\varepsilon}{k}w + c_{f2}k\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{8}$$

$$u_0\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(c_\rho\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{c_\rho k^2}{\varepsilon}, \tag{9}$$

$$u_0\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(c_\theta\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+2c_\rho\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}-1\right)^2-c_T\frac{\theta\varepsilon}{k}, \tag{10}$$

где u_0 – скорость набегающего потока, u – осредненный дефект продольной компоненты скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, w – касательное турбулентное напряжение Рейнольдса, ρ – осредненный дефект плотности, $\theta=\overline{\rho'^2}$ – дисперсия флуктуаций плотности; σ_ε, c_μ, c_s, c_1, c_2, c_{f1}, c_{f2}, c_ρ, c_θ, c_T – эмпирические константы. Первые четыре уравнения системы (5)– (8) представляют собой уравнения трехпараметрической модели турбулентности в приближении дальнего следа. Уравнения (9), (10) описывают трансформацию поля плотности под действием турбулентной диффузии. Замыкание осуществлено с применением простейшей градиентной гипотезы; используется также приближение дальнего следа. Слагаемые, содержащие в качестве сомножителей коэффициенты ламинарной вязкости и диффузии, отброшены в предположении малости, так как рассматривается развитое турбулентное течение. Базис допускаемой алгебры Ли для модели (5)–(10) состоит из операторов

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial\rho},$$

$$X_5=x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}-2k\frac{\partial}{\partial k}-3\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}-2w\frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_6=y\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial u}+2k\frac{\partial}{\partial k}+2\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}+2w\frac{\partial}{\partial w}+\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Модель плоского турбулентного следа за нагретым цилиндром имеет вид

$$u_0\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{11}$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\varepsilon, \qquad (12)$$

$$u_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+c_\mu c_{\varepsilon 1}k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}, \qquad (13)$$

$$u_0\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial\left(\overline{v'T'}\right)}{\partial y}, \qquad (14)$$

$$u_0\frac{\partial(\overline{v'T'})}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}c_{1\rho}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\left(\overline{v'T'}\right)}{\partial y}-\frac{2k}{3}\frac{\partial T}{\partial y}-c_{1T}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v'T'}, \qquad (15)$$

$$u_0\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}c_{1\rho}\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\left(\overline{T'^2}\right)}{\partial y}-2\overline{v'T'}\frac{\partial T}{\partial y}-c_T\frac{\varepsilon}{k}\overline{T'^2}, \qquad (16)$$

где u_0 – по-прежнему скорость набегающего потока, u – дефект осредненной продольной компоненты скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, T – осредненная температура, $\overline{v'T'}$ – турбулентный поток тепла, $\overline{T'^2}$ – дисперсия флуктуаций температуры. Эмпирические константы модели σ_ε, c_μ, c_1, c_2, c_T, $c_{1\rho}$, c_{1T} задаются. Первые три уравнения системы (11)–(16) – уравнения $(k-\varepsilon)$ модели турбулентности в приближении дальнего следа. Уравнения (14)–(16) описывают трансформацию поля температуры под воздействием турбулентной диффузии в следе.

Базис допускаемой алгебры Ли для этой системы состоит из операторов

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial T},$$

$$X_5=x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}-2k\frac{\partial}{\partial k}-3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}+T\frac{\partial}{\partial T}+2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial\overline{T'^2}},$$

$$X_6=y\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial u}+2k\frac{\partial}{\partial k}+2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}-T\frac{\partial}{\partial T}-2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial\overline{T'^2}},$$

$$X_7 = T\frac{\partial}{\partial T} + 2\overline{T'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{T'^2}} + \overline{v'T'}\frac{\partial}{\partial \overline{v'T'}}.$$

Последняя из рассматриваемых моделей служит для описания безымпульсного турбулентного следа. Она записывается в виде

$$u_0\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$u_0\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial y}\right) - \varepsilon, \tag{17}$$

$$u_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s \frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k},$$

где u_0 – скорость набегающего потока, u – дефект скорости, k – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, c_μ, $c_{\varepsilon 2}$, σ_ε – эмпирические константы; $s = 0$ для плоского течения и $s = 1$ в осесимметричном случае.

Система (17) имеет следующий базис допускаемой алгебры Ли для плоского случая

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad X_6 = y\frac{\partial}{\partial y} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon},$$

и для осесимметричного случая

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2k\frac{\partial}{\partial k} - 3\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \quad X_5 = y\frac{\partial}{\partial y} + 2k\frac{\partial}{\partial k} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Таким образом, найдены базисы допускаемых алгебр Ли для всех рассматриваемых моделей.

Во второй главе строятся автомодельные решения системы (1), удовлетворяющие краевым условиям:
а) условия невозмущенного потока

$$u \to 0, \quad k \to 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty;$$

б) условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Для модели (1), на основе полученных результатов в главе 1, строится представление для решений вида

$$u = x^{\alpha-1}U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad \varepsilon = x^{2\alpha-3}E(t), \tag{18}$$

где $t = y/x^{\alpha}$ – автомодельная переменная, а α – параметр автомодельности. Подставляя представление (18) в исходную модель (1), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U'' = \frac{E}{c_\mu K^2}\left((\alpha-1)U - U'\alpha t\right) + U'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}\right) - \frac{sU'}{t},$$

$$K'' = \frac{E}{c_\mu K^2}\left(2(\alpha-1)K - K'\alpha t\right) + K'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}\right) - \frac{sK'}{t} - {U'}^2 + \frac{1}{c_\mu}\frac{E^2}{K^2},$$

$$\begin{aligned} E'' = \frac{E\sigma_\varepsilon}{c_\mu K^2}\left((2\alpha-3)E - E'\alpha t + c_{\varepsilon 2}\frac{E^2}{K} - c_{\varepsilon 1}K{U'}^2\right) + \\ + E'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}\right) - \frac{sE'}{t}. \end{aligned} \tag{19}$$

Как показано в статье Капцова О.В., Шанько Ю.В. "Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа" система (19) имеет первый интеграл. Для плоского случая, $s = 0$, первый интеграл имеет вид

$$\frac{c_\mu U' K^2}{E} + \alpha t U = const,$$

а в осесимметричном случае, при $s = 1$, первый интеграл выглядит следующим образом

$$\frac{c_\mu U' K^2 t}{E} + \alpha t^2 U = const.$$

Константы, в силу граничных условий, равны нулю. Параметр автомодельности α определяется из закона сохранения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u dy = const.$$

Для плоского случая $\alpha = \frac{1}{2}$, для осесимметричного $\alpha = \frac{1}{3}$.

Для построения решений редуцированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений ставятся краевые условия

$$U'(0) = K'(0) = E'(0) = 0,$$
$$U(h) = K(h) = E(h) = 0, \quad h = 1.$$

Данная задача будет решаться "методом стрельбы". Способ, описанный в статье Капцова О.В., Шанько Ю.В. "Семейство автомодельных решений одной модели дальнего турбулентного следа", позволяет упростить поиск начальных данных в точке $t = 0$ для плоского случая.

Для модели (2) представление для автомодельных решений имеет следующий вид

$$u = x^{(\alpha-1)} U(t), \qquad k = x^{(2\alpha-2)} K(t),$$
$$\varepsilon = x^{(2\alpha-3)} E(t), \qquad w = x^{(2\alpha-2)} W(t),$$

где $t = y/x^\alpha$ – автомодельная переменная.

Редуцированная система обыкновенных дифференциальных уравнений запишется в виде

$$W' = -\frac{sW}{t} + \alpha t U' - (\alpha - 1)U, \tag{20}$$

$$K'' = \frac{2(\alpha-1)EK - \alpha t E K' - EWU' + E^2}{c_\mu K^2} + \\ + K'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t}\right), \qquad (21)$$

$$E'' = \frac{(2\alpha-3)E^2K - \alpha t E K E' - c_{\varepsilon 1}E^2 W U' + c_{\varepsilon 2}E^3}{c_\mu K^3} + \\ + E'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t}\right), \qquad (22)$$

$$W'' = \frac{2(\alpha-1)EW - \alpha t E W'}{c_s K^2} + \frac{c_{f1}E^2W - c_{f2}EK^2U'}{c_s K^3} + \\ + W'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K} - \frac{s}{t}\right) + \frac{sW}{t^2}. \qquad (23)$$

Лемма. Для системы (20)–(23) найден первый интеграл для плоского

$$W + \alpha t U = const,$$

и для осесимметричного случая

$$Wt + \alpha t^2 U = const.$$

Константы, в силу граничных условий, равны нулю. Параметр автомодельности $\alpha = \frac{1}{2}$ в плоском случае и $\alpha = \frac{1}{3}$ – в осесимметричном. Для системы (20)–(23) ставились естественные краевые условия

$$W(0) = 0, \quad U'(0) = K'(0) = E'(0) = 0,$$
$$U(h) = K(h) = E(h) = W(h) = 0, \quad h = 1.$$

Решения систем согласуются с экспериментальными данными на качественном и количественном уровнях.

Для модели (5)–(10) представление для автомодельных решений следующее

$$u = x^{\alpha-1}U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad \varepsilon = x^{2\alpha-3}E(t),$$
$$w = x^{2\alpha-2}W(t), \qquad \rho = x^{\alpha}H(t), \qquad \theta = x^{2\alpha}R(t),$$

где $t = y/x^{\alpha}$ – автомодельная переменная.

Для построения решений редуцированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений ставятся краевые условия

$$W(0) = H(0) = 0, \quad U'(0) = K'(0) = E'(0) = R'(0) = 0,$$
$$U(1) = K(1) = E(1) = W(1) = H(1) = R(1) = 0.$$

Можно показать, что редуцированная система допускает первый интеграл. Для рассмотренной модели (11)–(16) также найдено представление для автомодельных решений

$$u = x^{\alpha-1}U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad \varepsilon = x^{2\alpha-3}E(t),$$
$$T = x^{\beta-\alpha+1}G(t), \qquad \overline{v'T'} = x^{\beta}M(t), \qquad \overline{T'^2} = x^{2\beta-2\alpha+2}F(t),$$

где $t = y/x^{\alpha}$ – автомодельная переменная, α, β – параметры автомодельности и получена редуцированная система

$$-\frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U^{'}t = \frac{2c_{\mu}KU^{'}K^{'}}{E} - \frac{c_{\mu}K^2U^{'}E^{'}}{E^2} + \frac{c_{\mu}K^2U^{''}}{E},$$

$$K^{''} = \frac{1}{c_{\mu}}\left(\frac{E^2}{K^2} - \frac{E}{K} - \frac{tK^{'}E}{2K^2}\right) + K^{'}\left(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}\right) - {U^{'}}^{2},$$

$$E^{''} = E^{'}\left(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}\right) - c_{\varepsilon 1}\sigma_{\varepsilon}\frac{{U^{'}}^{2}E}{K} + \frac{\sigma_{\varepsilon}}{c_{\mu}}\left(\frac{c_2E^3}{K^3} - \frac{2E^2}{K^2} - \frac{tE^{'}E}{2K^2}\right),$$

$$-\frac{1}{2}\left(G + G^{'}t\right) = -M^{'},$$

$$-M - \frac{1}{2}M^{'}t = \frac{2c_{1\rho}KM^{'}K^{'}}{E} - \frac{c_{1\rho}K^2M^{'}E^{'}}{E^2} + \frac{c_{1\rho}K^2M^{''}}{E} - \frac{2}{3}KG^{'} - c_{1T}\frac{EM}{K},$$

$$F^{''} = F^{'}\left(\frac{E^{'}}{E} - \frac{2K^{'}}{K}\right) - \frac{E\left(F + \frac{1}{2}tF^{'}\right)}{K^2c_{1\rho}} + \frac{tGG^{'}E}{c_{1\rho}K^3} + \frac{c_TFE^2}{c_{1\rho}K^3}. \qquad (24)$$

Лемма. Редуцированная система (24) допускает два первых интеграла:

$$\frac{c_\mu U' K^2}{E} + \frac{1}{2}tU = const, \tag{25}$$

$$M - \frac{1}{2}tG = const. \tag{26}$$

В силу граничных условий константы равны нулю.

Используя соотношения (25), (26), приходим к упрощенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений и строим решения этой системы, удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$K'(0) = E'(0) = G'(0) = F'(0) = 0,$$
$$U(h) = K(h) = E(h) = G(h) = F(h) = 0, \qquad h = 1.$$

Для модели (17), которая описывает безымпульсный след, представление для решений имеет вид

$$u = x^\gamma U(t), \qquad k = x^{2\alpha-2}K(t), \qquad \varepsilon = x^{2\alpha-3}E(t),$$

где $t = y/x^\alpha$ – автомодельная переменная. Редуцированная система, тогда запишется в виде

$$U'' = \frac{u_0 E}{c_\mu K^2}\left(\gamma U - taU'\right) + U'\left(\frac{E'}{E} - 2\frac{K'}{K}\right) - \frac{sU'}{t},$$

$$K'' = \frac{u_0 E}{c_\mu K^2}\left(2(\alpha-1)K - K'\alpha t\right) + K'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}\right) - \frac{sK'}{t} + \frac{1}{c_\mu}\frac{E^2}{K^2},$$

$$E'' = \frac{u_0 E\sigma_\varepsilon}{c_\mu K^2}\left((2\alpha-3)E - E'\alpha t + c_{\varepsilon 2}\frac{E^2}{K}\right) + E'\left(\frac{E'}{E} - \frac{2K'}{K}\right) - \frac{sE'}{t}.$$

Построенные решения редуцированных систем удовлетворяют краевым условиям. При этом наблюдается достаточно хорошее согласование с экспериментальными данными.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Проведен теоретико-групповой анализ шести моделей турбулентности в приближении дальнего следа;
2. На основе допускаемых операторов построены представления для решений, получены редуцированные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены первые интегралы для этих систем;
3. Построены решения редуцированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие естественным краевым условиям. Найденные решения согласуются с экспериментальными данными на качественном и количественном уровнях.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору О.В. Капцову за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

Материалы диссертации опубликованы в работах:

1. Капцов О.В., Ефремов И.А. Инвариантные свойства модели дальнего турбулентного следа // Вычисл. технологии. Новосибирск ИВТ СО РАН. – 2005. – Т. 10, №6. с. 45–51.
2. Капцов О.В., Ефремов И.А, Шмидт А.В. Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, №2. – с. 74–78.
3. Ефремов И.А., Капцов О.В., Черных Г.Г. Симметрии и решения полуэмпирических моделей турбулентности // МФТИ. Сборник научных трудов "Симметрии дифференциальных уравнений". – 2009. – с. 79–88.
4. Ефремов И.А., Капцов О.В., Черных Г.Г. Автомодельные решения двух задач свободной турбулентности // Мат. моделирование. – 2009. – Т. 21, №12. – с. 137-144.

Работа по теме диссертации выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 07-01-00489, 04-01-00130, 04-01-00209).

Ефремов Илья Александрович

Автомодельные решения иерархии моделей дальнего турбулентного следа

Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук

Подписано в печать 2010 г. Заказ №

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИПК СФУ

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82