На правах рукописи

БОГДАНОВ ДМИТРИЙ ВАЛЕРИЕВИЧ

НУЛИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель: Садыков Тимур Мрадович, доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты:

Безродных Сергей Игоревич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГУ «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», отдел 21, ведущий научный сотрудник.

Ситник Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования, профессор.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита состоится 15 сентября 2022 г. в 14:00 ч. на заседании диссертационного совета Д 212.099.25, созданного на базе ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», `http://sfu-kras.ru`.

Автореферат разослан «___» _____________ 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук — Е. Н. Михалкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Задача изучения свойств множества нулей одного или нескольких многочленов со многими переменными, равно как и обратная задача построения идеала в кольце многочленов по заданному алгебраическому многообразию, относятся к числу фундаментальных проблем комплексного анализа и алгебраической геометрии.

Понятие амёбы полинома нескольких комплексных переменных является относительно новым (введено И. М. Гельфандом и др. в [гл. 6, 17] в 1994 году). Оно тесно связано с новой и активно развивающейся областью математики — тропической геометрией. Каждый тропический полином однозначно определяет некоторую *тропическую кривую* — граф на тропической плоскости, являющийся множеством негладкости этого полинома и снабжённый кратностями всех его рёбер. При рассмотрении отображения $\mathrm{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$ образ кривой $L(t)$ содержится при больших t в ε-окрестности некоторой тропической кривой. Размер ε этой окрестности тем меньше, чем больше t, и при $t \to \infty$ величина ε стремится к нулю. Таким образом, тропическая кривая является вырождением комплексной кривой $L(t)$ при $t \to \infty$. Напомним, что *16-я проблема Гильберта* связана с исследованием взаимного расположения овалов вещественных алгебраических кривых. Задача упростится, если рассмотреть предельную кривую при тропическом вырождении. Тогда количество овалов кривой и их взаимное расположение могут однозначно определяться формой предельной тропической кривой и знаками коэффициентов тропического полинома [7]. Процедуру построения тропической кривой, носящую название «склейка Виро» [19, 27], удобно переформулировать на двойственном языке диаграмм Ньютона. В работе [27] в качестве инструментов для изучения топологии вещественных алгебраических кривых также используются моментные отображения.

Связные компоненты дополнения к амёбе полинома p являются выпуклыми множествами и представляют собой образы областей сходимости кратных рядов Лорана с центром в начале координат, сходящихся к рациональной функции $1/p$.

Физическая интерпретация амёбы $\mathcal{A}_p$ и её *дополнения* ${}^c\mathcal{A}_p$ дана в работе [20]. Агрегатное состояние вещества в каждой точке модели зависит от её расположения: «замороженное» в неограниченной компоненте дополнения, «жидкое» внутри амёбы и «газообразное» в ограниченной компоненте дополнения. В этой же работе теория амёб используется для анализа граней кристаллов и случайных поверхностей. Понятие амёбы также используется для описания множества допустимых средних энергий в задачах статистической физики [9].

Кроме этого, теория амёб применяется к исследованию асимптотик многомерных разностных уравнений, играющих важную роль в теории обработки цифровых сигналов. В классической теореме Пуанкаре предполагается, что все корни предельного характеристического полинома различны по абсолютной величине. В работе [8] на основе понятия амёбы алгебраической гиперповерхности сформулирован многомерный аналог этого свойства полинома, обеспечивающий требуемое асимптотическое поведение для специальных решений соответствующего разностного уравнения.

Изучаемые в данной диссертации гипергеометрические полиномы являются частными случаями гипергеометрических функций. Многие специальные и элементарные функции можно рассматривать как частные случаи гипергеометрических функций при выборе подходящих значений параметров и преобразования независимых переменных. Необходимость систематизации существующего многообразия специальных функций математической физики для возросших потребностей компьютерной алгебры обуславливает значительный интерес к многомерной гипергеометрической теории и её приложениям.

Полиномиальные частные случаи гипергеометрических функций включают в себя, в числе прочих, классические полиномы Чебышёва первого и второго рода, Гегенбауэра, Эрмита, Якоби, Лагерра и Лежандра, а также их многочисленные многомерные аналоги [14], которые находят широкое применение в теории аппроксимации.

Также гипергеометрические полиномы являются решениями соответствующих голономных систем дифференциальных уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами и используются для анализа их свойств [10].

Цели и результаты диссертационной работы. Целью настоящей диссертации является изучение тропико-геометрических свойств нулей гипергеометрических полиномов нескольких комплексных переменных и их амёб.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Доказана теорема о существовании неконфлюэнтной голономной гипергеометрической системы Горна, одним из решений которой является заранее заданный полином $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Кроме того, данная система уравнений может быть выбрана таким образом, что гипергеометрический идеал в алгебре Вейля, определяющий эту систему, допускает базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов.

2. Доказана теорема о существовании гипергеометрической системы Горна, имеющей полиномиальное решение с неприводимым носителем, таким, что его многогранник Ньютона равен заранее заданному выпуклому целочисленному многограннику $P \subset \mathbb{R}^n$, для которого $P \cap \mathbb{Z}^n$ является $\mathbb{Z}^n$-связным.

3. Доказана теорема об оптимальности множества нулей (при некоторых ограничениях) гипергеометрического полинома в смысле [16]. Таким

образом, число связных компонент дополнения амёбы гипергеометрического полинома равно числу целых точек в его многограннике Ньютона.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть применены для решения голономных систем дифференциальных уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами, в теории специальных функций для исследования множеств их нулей, а также в многомерном комплексном анализе и тропической геометрии.

Методология и методы исследования.

В данной диссертационной работе распределения корней полиномов многих комплексных переменных изучаются с использованием понятия амёбы [17]. Всякий полином является решением голономной системы дифференциальных уравнений типа Горна и однозначно определяется соответствующим коэффициентом Оре–Сато. В доказательстве теоремы об оптимальности гипергеометрических полиномов используется понятие взвешенного моментного отображения [28]. Для вычисления контура амёбы используется понятие логарифмического отображения Гаусса [21].

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Результаты исследований были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России в Северном (Арктическом) федеральном университете им. М. В. Ломоносова, г. Коряжма, 2015 год;

- научный семинар по многомерному комплексному анализу им. А. Г. Витушкина в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, г. Москва, 2015 год;
- международная конференция «Computer Algebra» в Вычислительном центре Российской академии наук им. А. А. Дородницына, г. Москва, 2016, 2017 и 2021 годы;
- международная конференция «Computer Algebra in Scientific Computing» в Бухарестском университете, г. Бухарест, Румыния, 2016 год и в математическом центре «Сириус», г. Сочи, 2021 год;
- семинар по комплексной геометрии в Корейском институте перспективных исследований (KIAS), г. Сеул, Республика Корея, 2016 год;
- Красноярский городской семинар по многомерному комплексному анализу и алгебраической геометрии в Сибирском федеральном университете, 2021 и 2022 годы;
- семинар «Компьютерная алгебра» факультета ВМК МГУ и ВЦ РАН, г. Москва, 2021 год;
- 22-й семинар по компьютерной алгебре памяти профессора В. Гердта в Объединённом институте ядерных исследований, г. Дубна, 2021 год.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1–5], из них 2 статьи ([1, 2]) в рецензируемых изданиях, которые входят в перечень рекомендуемых ВАК.

Основные результаты и их доказательства в работе [1] получены в нераздельном соавторстве с Т. М. Садыковым.

Основные результаты в работе [2] принадлежат диссертанту. Идеи и методы разрабатывали совместно диссертант, Т. М. Садыков и А. А. Кытманов; им же принадлежит постановка задач.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, разделённых на параграфы, заключения, библиографии и трёх приложений. Общий объём диссертации составляет 93 страницы. Библиография содержит 77 наименований, в число которых включены пять работ автора по теме диссертации.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Также присутствует краткий исторический обзор.

Классическим методом изучения и способом визуализации алгебраического многообразия в многомерном комплексном пространстве является обращение к его диаграмме Рейнхардта.

Определение. *Диаграммой Рейнхардта* множества $M \subset \mathbb{C}^n$ называется его образ относительно отображения

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Как было замечено в [17, глава 6], рассмотрение диаграммы Рейнхардта алгебраического многообразия в логарифмических координатах даёт существенные преимущества с точки зрения многих задач анализа, а также комплексной и выпуклой геометрии. Известно, что комплексная прямая изображается на диаграмме Рейнхардта неограниченным полиэдром. Логарифмическая замена переменных $(|x_1|, \ldots, |x_n|) \mapsto (\ln|x_1|, \ldots, \ln|x_n|)$ преобразует данный полиэдр в фигуру, называемую *амёбой* комплексной прямой. В книге [17, глава 6] предложены два конкурирующих определения амёбы полинома: аффинная и компактифицированная версии.

Определение 1. *(Аффинная) амёба* $\mathcal{A}_p$ полинома Лорана $p(x)$ (или алгебраической гиперповерхности $\{p(x) = 0\}$) есть образ гиперповерхности $p(x) = 0$ относительно отображения

$$\mathrm{Log} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\ln |x_1|, \ldots, \ln |x_n|).$$

Определение 2. *Компактифицированная амёба* $\overline{\mathcal{A}}_p$ полинома Лорана $p(x)$ (или алгебраической гиперповерхности $\{p(x) = 0\}$) есть образ гиперповерхности $p^{-1}(0)$ относительно моментного отображения [18] в многогранник Ньютона $\mathcal{N}_p$, являющегося выпуклой оболочкой множества S показателей мономов $p(x)$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{\sum\limits_{\alpha \in S} \alpha \cdot |x^\alpha|}{\sum\limits_{\alpha \in S} |x^\alpha|} = \frac{\sum\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot |x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}|}{\sum\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S} |x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}|}.$$

Определения 1 и 2 представляют интерес только в размерности два и выше, поскольку амёба полинома одного переменного является конечным множеством, которое можно исследовать с помощью различных классических методов локализации корней полиномов.

Во введении также раскрыта связь теории амёб с тропической геометрией. Всякое комплексное число X представимо в виде $X = \varphi r$, где $|\varphi| = 1$, $\varphi \in \mathbb{C}$ называется фазой и $r \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$ — амплитудой соответственно. Предполагая, что $r > 0$, положим $r = t^x$, где $t > 1$ — фиксированное вещественное число и $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $\mathrm{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное в координатах в виде $(x, y) \mapsto (\log_t |x|, \log_t |y|)$. Образ прямой $L(t)$

при отображении Log_t содержится при больших t в ε-окрестности некоторой тропической прямой.

Одним из центральных понятий в диссертации является понятие гипергеометрической функции нескольких комплексных переменных.

Определение 3. *Дифференциальным уравнением Гаусса* называется

$$x\left(1-x\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\left(c-\left(a+b+1\right)x\right)\frac{du}{dx}-abu=0, \tag{1}$$

где параметры $a,b,c\in\mathbb{C}$. Данное дифференциальное уравнение имеет три особые точки: 0, 1 и ∞.

Если параметр c не равен неположительному целому числу ($c\neq 0,-1,-2,\ldots$), то регулярное в нуле решение уравнения Гаусса можно разложить в ряд, называемый *гипергеометрическим*:

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(a,b;c;x\right)\equiv F\left(a,b;c;x\right)=1+\frac{ab}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a\left(a+1\right)b\left(b+1\right)}{c\left(c+1\right)}\frac{x^2}{2!}+\ldots=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n\left(b\right)_n x^n}{\left(c\right)_n n!},\end{aligned}$$

где функция $F\left(a,b;c;x\right)$ — *гипергеометрическая* функция и $\left(p\right)_n=\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$ — символ Похгаммера.

В данной диссертации выделены свойства, присущие известным семействам ортогональных полиномов, которые описываются термином «гипергеометрические» [12, 13, 14].

В первой главе установлено оптимальное свойство множества нулей гипергеометрических полиномов нескольких переменных.

Определение 4. Формальный ряд Лорана

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi\left(s\right)\,x^s \tag{2}$$

называется *гипергеометрическим*, если для любого $j = 1, \ldots, n$ отношение $\varphi(s+e_j)/\varphi(s)$ является рациональной функцией переменных $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Обозначим эту рациональную функцию как $P_j(s)/Q_j(s+e_j)$, где $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ — стандартный базис решётки $\mathbb{Z}^n$. Под *носителем* такого ряда подразумевается подмножество из $\mathbb{Z}^n$, на котором $\varphi(s) \neq 0$.

Гипергеометрической функцией называется (как правило, многозначная) аналитическая функция, полученная с помощью аналитического продолжения гипергеометрических рядов с непустой областью сходимости вдоль всех возможных путей.

Теорема 5. (Оре, Сато, см. [6]) *Коэффициенты гипергеометрического ряда задаются формулой*

$$\varphi(s) = t^s U(s) \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i\right), \tag{3}$$

где $t^s = t_1^{s_1} \ldots t_n^{s_n}$, $t_i, c_i \in \mathbb{C}$, $\mathbf{A}_i = (A_{i,1}, \ldots, A_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, m$ *и* $U(s)$ — *произведение некоторой рациональной функции и периодической функции* $\phi(s)$ *такой, что* $\phi(s+e_j) = \phi(s)$ *для всех* $j = 1, \ldots, n$.

Определение 6. *Система Горна, определяемая коэффициентом Оре–Сато.* Формальный ряд Лорана $\sum_{s\in\mathbb{Z}^n} \varphi(s)\, x^s$ с коэффициентом, удовлетворяющим соотношениям $\varphi(s+e_j)/\varphi(s) = P_j(s)/Q_j(s+e_j)$, является (формальным) решением следующей системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа (см. [6]):

$$x_j P_j(\theta) f(x) = Q_j(\theta) f(x), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\theta_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Система (4) называется *гипергеометрической системой, определяемой коэффициентом Оре–Сато* $\varphi(s)$ (см. [6]) и обозначается $\mathrm{Horn}(\varphi)$.

В диссертации изучались только голономные гипергеометрические системы Горна, то есть, $\operatorname{rank}(\operatorname{Horn}(\varphi))$ всегда предполагался конечным. Идеал J в алгебре Вейля (равно как и соответствующая система дифференциальных уравнений (4)) называется *голономным*, если комплексная размерность его характеристического многообразия

$$\operatorname{char}(J) = \left\{(x,z) \in \mathbb{C}^{2n} : \sigma(P)(x,z) = 0, \text{ для всех } P \in J\right\},$$

где $\sigma(P)$ обозначает главный символ дифференциального оператора P, равна размерности пространства переменных n. Кроме того, система (4) называется *неконфлюэнтной*, если для всех $i = 1, \ldots, n$ выполняются равенства $\deg P_i = \deg Q_i$.

Значительный интерес представляет важный частный случай коэффициента Оре–Сато (3), при котором $t_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $U(s) \equiv 1$ (см. также [11]). Система Горна, связанная с коэффициентом Оре–Сато, обозначается $\operatorname{Horn}(A, c)$, где A — матрица со строками $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \in \mathbb{Z}^n$ и $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m$. В этом случае следующие полиномы $P_j(s)$ и $Q_j(s)$ определяют систему (4):

$$P_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}>0} \prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{A_{i,j}-1} \left(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i + \ell_j^{(i)}\right),$$

$$Q_j(s) = \prod_{i:A_{i,j}<0} \prod_{\ell_j^{(i)}=0}^{|A_{i,j}|-1} \left(\langle \mathbf{A}_i, s\rangle + c_i + \ell_j^{(i)}\right).$$

Доказана лемма, показывающая, что некоторые преобразования полинома не влияют на топологию его амёбы.

Лемма 7. *Число связных компонент дополнения к амёбе полинома Лорана* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *такое же, как и для полинома* $x^a p(t_1 x^{v_1}, \ldots, t_n x^{v_n})^{\ell}$ *при всех* $\ell \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ *и для любой* *невырожденной целочисленной матрицы v со строками $v_1, \ldots, v_n$. То есть, между связными компонентами дополнений данных двух амёб существует биекция. Кроме того, порядки [16] и конусы рецессии [24] соответствующих компонент преобразуются друг в друга линейным преобразованием с матрицей v.*

Следующий результат показывает, что многогранник Ньютона $\mathcal{N}_{p(x)}$ отражает структуру амёбы $\mathcal{A}_{p(x)}$ [16, теорема 2.8 и утверждение 2.6].

Теорема 8. (см. [16]) *Пусть $p(x)$ — полином Лорана и пусть $\{M\}$ обозначает множество всех связных компонент дополнения к амёбе ${}^c\mathcal{A}_{p(x)}$. Тогда существует инъективная функция $\nu : \{M\} \to \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_{p(x)}$, такая, что конус, двойственный к $\mathcal{N}_{p(x)}$ в точке $\nu(M)$, совпадает с конусом рецессии множества M. В частности, число связных компонент ${}^c\mathcal{A}_{p(x)}$ не может быть меньше числа вершин $\mathcal{N}_{p(x)}$, и не может превышать числа целых точек в $\mathcal{N}_{p(x)}$.*

В диссертации изучен частный случай экстремального значения числа связных компонент дополнения к амёбе, определение которого приведено ниже.

Определение 9. (см. также [16, определение 2.9]) Алгебраическая гиперповерхность $\mathcal{H} \subset (\mathbb{C}^*)^n$, $n \geq 2$, называется *оптимальной*, если число связных компонент её дополнения амёбы ${}^c\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ равно числу целых точек в многограннике Ньютона определяющего полинома $\mathcal{H}$. Будем говорить, что полином (а также его амёба) является *оптимальным*, если множество его нулей является оптимальной алгебраической гиперповерхностью.

В разделе 1.1 приведён пример полинома двух переменных, представлены в явном виде определяющий его коэффициент Оре–Сато и система Горна, даны изображения аффинной и компактифицированной амёбы. В другом примере рассмотрено типичное семейство оптимальных полиномов, задаваемое биортогональным семейством в единичном шаре $\{V_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$, $x \in \mathbb{C}^n$.

В разделе 1.2 показано, что семейство всех голономных систем дифференциальных уравнений в частных производных вида (4) слишком велико, чтобы служить в качестве определения гипергеометрического полинома. В самом деле, с точки зрения общего определения 4, всякий полином любого числа переменных является гипергеометрической функцией, что проясняется в следующей теореме.

Теорема 10. *Для любого полинома* $p(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *существует неконфлюэнтная [24] голономная гипергеометрическая система вида (4), одним из решений которой является* $p(x)$. *Кроме того, она может быть выбрана таким образом, что гипергеометрический идеал в алгебре Вейля (то есть алгебры линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами), определяющий эту систему, допускает базис, состоящий из коммутативного семейства дифференциальных операторов.*

В доказательстве теоремы для $s \in \mathbb{C}^n$ коэффициент Оре–Сато $\varphi(s)$ задан как

$$\varphi(s) = \frac{\prod\limits_{\alpha \in S} (s_1 + \ldots + s_n - |\alpha|)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\alpha \in S} (s_j - \alpha_j)}, \tag{5}$$

также приведены следующие определения и формулировка леммы, используемые далее в диссертации.

Определение 11. Множество $S \subset \mathbb{Z}^n$ называется $\mathbb{Z}^n$-*выпуклым*, если условие $\{\lambda s^{(0)} + (1-\lambda) s^{(1)} : \lambda \in [0,1]\} \cap \mathbb{Z}^n \subset S$ выполняется для всех $s^{(0)}, s^{(1)} \in S$.

Определение 12. Множество $S \subset \mathbb{Z}^n$ является $\mathbb{Z}^n$-*связным*, если любые две точки этого множества могут быть соединены ломаной с единичными сторонами и вершинами в S.

Лемма 13. (см. [25]) *Если носитель* S *полиномиального решения системы (4) неприводим, то* S *является* $\mathbb{Z}^n$-*выпуклым множеством.*

Доказана теорема, утверждающая, что носитель любого выпуклого целочисленного многогранника является неприводимым решением подходящего частного случая гипергеометрической системы (4).

Теорема 14. *Для любого выпуклого целочисленного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ такого, что $P \cap \mathbb{Z}^n$ является $\mathbb{Z}^n$-связным, существует гипергеометрическая система вида (4) и её полиномиальное решение $p(x)$ с неприводимым носителем, таким, что $\mathcal{N}_{p(x)} = P$.*

В доказательстве теоремы отмечено, что носитель полинома с коэффициентом

$$\varphi(s) = \frac{\exp\left(i\pi\left(\sum\limits_{j=1}^{q}\langle B_j, s\rangle + c_j\right)\right)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(1 - \langle B_j, s\rangle - c_j)}$$

не изменится, если заменить числитель в данной формуле на 1, поэтому коэффициент Оре–Сато гипергеометрического полинома принимает следующий вид:

$$\psi_P(s) := \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(1 - \langle B_j, s\rangle - c_j)}. \tag{6}$$

Следующее определение является центральным в первой главе диссертации и объединяет важные свойства классических семейств гипергеометрических полиномов: плотность носителя, неприводимость носителя и свойство «быть решением некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами».

Определение 15. Под *гипергеометрическим полиномом многих переменных* с носителем в выпуклом целочисленном многограннике $P \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, подразумевается полином

$$\sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s \tag{7}$$

с коэффициентом $\psi_P(s)$, заданным формулой (6).

В разделе 1.2 приведены примеры гипергеометрических полиномов, связанных с некоторыми семействами целочисленных выпуклых многогранников (прямое произведение отрезков, симплекс, кросс-политопы, полином, ассоциированный с поверхностью Хирцебруха), и исследованы их свойства.

Гипергеометрические полиномы, введённые в определении 15, обладают свойствами, аналогичными свойствам классических гипергеометрических полиномов, перечисленных во введении. Аналог свойства корней для (7) определяется следующей теоремой, которая является основным результатом первой главы диссертации.

Теорема 16. *Пусть*

$$p\,(x) = \sum_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \psi_P(s) x^s$$

— гипергеометрический полином с носителем в выпуклом целочисленном многограннике $P \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (определение 15). Предположим, что разбиение многогранника P, двойственное тропической гиперповерхности, заданной тропическим полиномом

$$p_{trop}\,(\zeta) := \max_{s \in P \cap \mathbb{Z}^n} \left\{ \ln |\psi_P\,(s)| + \langle s, \zeta \rangle \right\}, \tag{8}$$

является триангуляцией. Тогда гипергеометрический полином $p\,(x)$ оптимален.

В доказательстве этой теоремы использовано понятие взвешенной компактифицированной амёбы полинома.

Определение 17. Следуя идеям из [28], зададим *взвешенное моментное отображение,* связанное с алгебраической гиперповерхностью $\{x \in \mathbb{C}^n :$

$p(x) := \sum\limits_{s \in S} a_s x^s = 0\}$, следующим образом:

$$\mu_p(x) := \frac{\sum\limits_{s \in S} s \cdot |a_s||x^s|}{\sum\limits_{s \in S} |a_s||x^s|}. \tag{9}$$

Из общей теории моментных отображений следует [18], что $\mu_p(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{N}_p$.

Определение 18. Под *взвешенной компактифицированной амёбой* алгебраической гиперповерхности $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{C}^n : p(x) = 0\}$ понимается множество $\mu_p(\mathcal{H})$ и используется обозначение $\mathcal{WCA}(p)$.

Также в разделе 1.2 приведён пример оптимального гипергеометрического полинома.

В разделе 1.3 рассмотрены классические гипергеометрические ряды $F_1, \ldots, F_4$, $G_1, \ldots, G_3$, $H_1, \ldots, H_7$, а также другие ряды в списке Горна [15], которые по общему мнению являются «истинно гипергеометрическими». Функция Аппеля F_1 является одним из важнейших классических гипергеометрических рядов, так как согласно результатам [15], любая двумерная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений второго порядка и голономного ранга 3 может быть преобразована в систему для F_1 или предельный частный случай этой системы. Для функции Аппеля F_1 доказано следствие из теоремы 16.

Следствие 19. *Полиномиальные случаи гипергеометрической функции Аппеля $F_1(a, b_1, b_2, c; x, y)$ оптимальны при $a, b_1, b_2, -c < 0$ и $a > b_1 + b_2$.*

В разделе 1.4 собраны примеры гипергеометрических полиномов многих переменных вместе с их многогранниками Ньютона и амёбами.

Во второй главе предложены алгоритмы для вычисления и визуализации полиномиальных амёб, их контуров, компактифицированных амёб и сечений амёб полиномов трёх переменных двумерными плоскостями. Также представлены метод и алгоритм для вычисления полиномов, амёбы которых обладают наиболее сложной топологией среди всех полиномов с фиксированным многогранником Ньютона.

В разделе 2.1 введено следующее определение, необходимое для формализации задачи визуализации амёб.

Определение 20. Будем называть *«тушкой» амёбы* $\hat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cap B$ пересечение амёбы $\mathcal{A}$ и некоторого шара B такое, что количество связных компонент дополнения к $\hat{\mathcal{A}}$ настолько велико, как это может быть (то есть равным числу связных компонент в дополнении к $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^n$).

Также в данном разделе рассмотрены некоторые полиномы двух переменных и вычислены их амёбы.

В разделе 2.2 использовано понятие гипергеометрического полинома (см. определение 15) с целью конструктивной генерации оптимальных амёб. Приведены алгоритм вычисления коэффициентов гипергеометрического полинома с заданным носителем и примеры его использования.

В разделе 2.3 изучена задача вычисления и визуализации контура амёбы. Граница амёбы допускает задание на ней аналитической структуры в смысле следующего определения.

Определение 21. *Контуром* амёбы $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ называется множество $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ критических точек логарифмического отображения Log, суженного на V:

$$\mathrm{Log}:\ V \to \mathbb{R}^n.$$

Структура контура амёбы может быть описана в терминах логарифмического отображения Гаусса, которое определяется следующим образом.

Определение 22. *Логарифмическим отображением Гаусса* [21] для гиперповерхности V чистой размерности $m-k$ называется отображение $\gamma_V:\ V \to$

$\mathrm{Gr}\,(m,k)$, которое каждой неособой точке $x \in V$ ставит в соответствие комплексную нормальную плоскость к образу $\ln V$ в точке $\ln x$.

Если $V = \{x \in \mathbb{T}^n : p\,(x) = 0\}$, то логарифмическое отображение Гаусса $\gamma : \ V \to \mathbb{CP}^{n-1}$ имеет следующий аналитический вид [22]:

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, x_n \frac{\partial p}{\partial x_n} \right).$$

Условия на контур амёбы гиперповерхности даёт следующая теорема.

Теорема 23. *[22, 26] Точка гиперповерхности V является критической для отображения $\mathrm{Log}V$ тогда и только тогда, когда её образ при логарифмическом отображении Гаусса лежит в действительном проективном подпространстве $\mathbb{RP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$.*

Таким образом, контур амёбы гиперповерхности есть множество $\mathrm{Log}\left(\gamma^{-1}\left(\mathbb{RP}^{n-1}\right)\right)$. Отмечено, что граница амёбы $\partial\mathcal{A}_{p(x)}$ обязательно является подмножеством контура $\mathcal{C}_{p(x)}$, но в общем случае отличается от него. Знание структуры контура амёбы важно для описания топологической структуры амёбного дополнения.

Раздел 2.4 посвящён вычислению компактифицированных (см. определение 2) и взвешенных компактифицированных (см. определение 18) амёб полиномов двух переменных. Основной вычислительной задачей является моментное отображение (2) или (9) вместо логарифмического отображения в аффинном случае.

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Bogdanov, D. V. *Hypergeometric polynomials are optimal* / D. V. Bogdanov, T. M. Sadykov // Mathematische Zeitschrift — 2020. — Vol. 296. — P. 373-390.

[2] Bogdanov, D. V. *Algorithmic computation of polynomial amoebas* / D. V. Bogdanov, A. A. Kytmanov, T. M. Sadykov // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), Springer. Cham. — 2016. — Vol. 9890. — P. 87-100.

[3] Богданов, Д. В. *Тропико-геометрические свойства нулей гипергеометрических многочленов нескольких комплексных переменных* / Д. В. Богданов, Т. М. Садыков // V шк.-конф. по алгебр. геометрии и комплексн. анализу для молодых математиков России : мат-лы науч. конф. (Коряжма, 17 — 22 августа 2015 г.) / сост. И. В. Кузнецова, Вик. С. Куликов, Д. В. Осипов, С. А. Тихомиров. — Коряжма, 2015. — С. 39-40. — ISBN 978-5-906619-18-1.

[4] Богданов, Д. В. *Вычисление полиномиальных решений гипергеометрических систем* / Д. В. Богданов, Т. М. Садыков // Компьютер. алгебра : мат-лы междунар. конф. «Компьютерная алгебра» (Москва, 29 июня — 2 июля 2016 г.) / под ред. С. А. Абрамова и Л. А. Севастьянова. — М. : ФИЦ ИУ РАН, 2016. — С. 39-40. — ISBN 978-5-91993-061-7.

[5] Богданов, Д. В. *Вычисление амёб полиномов двух переменных* / Д. В. Богданов // Компьютер. алгебра : мат-лы междунар. конф. «Компьютерная алгебра» (Москва, 30 октября — 3 ноября 2017 г.) / под ред. С. А. Абрамова и Т. М. Садыкова. — М. : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2017. — С. 68-73. — ISBN 978-5-7307-1266-9.

Цитированная литература

[6] Гельфанд, И. М. *Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа* / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах // УМН. — 1992. — Т. 47, №4(286). — С. 3-82.

[7] Казарян, М. Э. *Тропическая геометрия* / М. Э. Казарян. — М. : МЦНМО, 2012. — 43 с. — ISBN: 978-5-94057-966-3.

[8] Лейнартас, Е. К. *Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений* / Е. К. Лейнартас, М. Пассаре, А. К. Цих // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, №10. — С. 87-104.

[9] Почекутов, Д. Ю. *Об асимптотике коэффициентов Лорана и ее применении в статистической механике* / Д. Ю. Почекутов, А. К. Цих // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., — 2009. — Т. 2, №4. — С. 483-493.

[10] Садыков, Т. М. *О многомерной системе дифференциальных гипергеометрических уравнений* / Т. М. Садыков // Сиб. матем. журн. — 1998. — Т. 39, №5. — С. 1141-1153.

[11] Dickenstein, A. *Bivariate Hypergeometric D-modules* / A. Dickenstein, L. Matusevich, T. M. Sadykov // Adv. Math. — 2005. — Vol. 196. — P. 78-123.

[12] Dominici, D. *Real zeros of* ${}_2F_1$ *hypergeometric polynomials* / D. Dominici, S. J. Johnston, K. Jordaan // Journal of Comput. and Appl. Math. — 2013. — №247. — P. 152-161.

[13] Driver, K. A. *Asymptotic zero distribution of a class of hypergeometric polynomials* / K. A. Driver, S. J. Johnston // Quaestiones Mathematicae. — 2007. — Vol. 30, №2. — P. 219-230.

[14] Dunkl, C. F. *Orthogonal polynomials of several variables* / C. F. Dunkl, Y. Xu. — Cambridge : Cambridge University Press, 2014. — 450 p. — ISBN 978-1-107-07189-6.

[15] Erdelyi, A. *Hypergeometric functions of two variables* / A. Erdelyi // Acta Math. — 1950. — №83. — P. 131-164.

[16] Forsberg, M. *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas* / M. Forsberg, M. Passare, A. K. Tsikh // Adv. Math. — 2000. — Vol. 151, №1. — P. 45-70.

[17] Gelfand, I. M. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. — Boston : Birkhäuser, 1994. — 523 p. — ISBN 978-0-8176-4771-1.

[18] Guillemin, V. *Convexity properties of the moment mapping* / V. Guillemin, S. Sternberg // Invent. Math. — 1982. — Vol. 67, №3. — P. 491-513.

[19] Itenberg, I. *Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture* / I. Itenberg, O. Viro // The Mathematical Intelligencer. — 1996. — Vol. 18, №4. — P. 19-28.

[20] Kenyon, R. *Dimers and amoebae* / R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield // Ann. Math. — 2006. — Vol. 163. — P. 1019-1056.

[21] Madani, F. *Generalized logarithmic Gauss map and its relation to (co)amoebas* / F. Madani, M. Nisse // Mathematische Nachrichten. — 2013. — Vol. 286, №14-15. — P. 1510-1513.

[22] Mikhalkin, G. *Real algebraic curves, the moment map and amoebas* / G. Mikhalkin // Ann. Math. : Second Series — 2000. — Vol. 151, №1. — P. 309-326.

[23] Nørlund, N. E. *Hypergeometric functions* / N. E. Nørlund // Acta Math. — 1955. — Vol. 94. — P. 289-349.

[24] Passare, M. *Singularities of hypergeometric functions in several variables* / M. Passare, T.M. Sadykov, A.K. Tsikh // Compos. Math. — 2005. — Vol. 141, №3. — P. 787-810.

[25] Sadykov, T. *On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type* / T. Sadykov // Math. Scand. — 2002. — Vol. 91, №1. — P. 127-149.

[26] Theobald, T. *Computing amoebas* / T. Theobald // Experiment. Math. — 2002. — Vol. 11, №4. — P. 513-526.

[27] Viro, O. *From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry* / O. Viro // Japanese Journal of Mathematics. — 2008. — Vol. 3. — P. 185-214.

[28] Zharkov, I. *Torus fibrations of Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties* / I. Zharkov // Duke Math. J. — 2000. — Vol. 101, №2. — P. 237-257.