На правах рукописи

Антипова Ирина Августовна

МНОГОМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕОРИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Красноярск 2009

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор А.М. Кытманов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор А.Г. Сергеев доктор физико-математических наук, профессор А.Д. Медных доктор физико-математических наук, профессор В.В. Чуешев
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится 6 марта 2009 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан 2 февраля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Известно, что одно из самых популярных интегральных преобразований в математическом анализе – преобразование Фурье играет важную роль при обработке сигналов, т.е. в проблеме передачи информации. Аналогичными свойствами обладают и все родственные ему интегральные преобразования (Лапласа, Меллина, Коши, а также более позднее преобразование Радона, лежащее в основе принципа действия современного томографа). Эффективность использования интегральных преобразований особенно ярко проявляется в рамках комплексного анализа, где благодаря теореме Коши–Пуанкаре, т.е. теории вычетов, значительно расширяются возможности точного или асимптотического вычисления интегралов. Теория вычетов, лежащая на стыке комплексного анализа и алгебраической геометрии, играет важную роль в этих направлениях математики и в математической физике.

Наибольшее применение преобразования Меллина получают в теориях специальных функций. Например, в теории чисел преобразование Меллина переводит тэта-функцию Якоби в дзета-функцию Римана[1], а значит, из функционального уравнения для первой следует функциональное уравнение для второй. В середине прошлого столетия были сформированы многомерные интегралы Меллина-Барнса, которые представляют собой обратные преобразования Меллина для отношения произведений конечного числа гамма-функций в композициях с линейными функциями. Такие интегралы представляют гипергеометрические функции – самый обширный класс среди всех специальных функций. В него входит подкласс неконфлуэнтных гипергеометрических функций, содержащий в себе классическую гипергеометрическую функцию Гаусса и A – гипергеометрические ряды,[2],[3] в частности, фундаментальные периоды многообразий Калаби-Яу.[4]

---

[1] Мамфорд Д. *Лекции о тэта-функциях.* М.: Мир. 1988. 446 С.

[2] Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. *Гипергеометрические функции и торические многообразия* // Функц. анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 2. С. 12-26.

[3] Passare M., Sadykov T., Tsikh A. *Singularities of hypergeometric functions in several variables* // Compositio Math. 2005. V. 141. P. 787–810.

[4] Candelas P., De la Ossa X., Font A., Katz S., Morrison S.R. *Mirror Symmetry for Two Parameter Model - I* // Nucl. Phys. 1994. B416. P. 481.

В последнее время обнаружилось, что преобразования Меллина настолько пропитаны природой комплексного анализа, что их можно считать частью теории вычетов. Несколько неожиданным оказался и тот факт, что многомерная теория интегральных преобразований Меллина практически отсутствовала. Поэтому, ввиду огромной важности как для самого комплексного анализа, так и в теориях гипергеометрических функций и D–модулей, в проблемах обработки сигналов *актуальной задачей является построение теории многомерных преобразований Меллина.*

Одно из ярких применений преобразований Меллина состояло в предъявлении интегральной формулы для решения общего алгебраического уравнения, найденной Меллином в 1921 году[5]. В начале нынешнего столетия в работах Б. Штурмфельса[6], А. Циха и его соавторов[7,8] были получены аналитические продолжения для решения общего алгебраического уравнения, а также области сходимости для гипергеометрических рядов, представляющих решение, и взаимное расположение этих областей относительно дискриминантного множества уравнения. К этому времени уже были достаточно глубоко изучены так называемые A-дискриминанты[9,10] (дискриминанты полиномов нескольких переменных). Однако, *оставались открытыми вопросы обобщений интегральных представлений для решений системы уравнений, описания областей сходимости представляющих интегралов и дискриминантных множеств общих полиномиальных отображений.*

Интегральные представления функциональных объектов (обычных и обобщенных функций, дифференциальных форм, сечений расслоений) составляют важный инструмент в вопросах аналитических продолжений

---

[5] Mellin H. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C.R. Acad. Sci. Paris. 1921. V. 172. P. 658–661.

[6] Sturmfels B. *Solving algebraic equations in terms of A-hypergeometric series* // Discrete Math. 2000. V. 210. P. 171-181.

[7] Семушева А.Ю., Цих А.К. *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений* // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. науч. тр. Красноярск: КрасГУ. 2000. С.134-146.

[8] Passare M., Tsikh A. *Algebraic equations and hypergeometric series.* In the book „The legacy of N.H. Abel“. Springer - Verlag. Berlin. 2004. P. 653–672.

[9] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A. *Discriminants, resultants and multidimensional determinants.* Birkhäuser. Boston. 1994. x+523 pp.

[10] Kapranov M. *A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map* // Math. Ann. 1991. V. 290. P. 277-285.

этих объектов. В качестве подтверждения достаточно указать роль интегрального представления Бохнера–Мартинелли в обосновании знаменитого феномена Гартогса (Der Hartogs–Bochner Kugelsatz) или результат Атьи о мероморфном продолжении функции P^{λ}. Несколько иную методологию в задачах аналитических подолжений доставляет идея Карлемана о восстановлении голоморфных функций по ее значениям, например, на части границы области. Здесь, следуя идее физиков–теоретиков Фока и Куни, вместо интегральных представлений целесообразно использовать интегральные преобразования. Эта идеология получила развитие в монографии Л.А. Айзенберга[11], статьях А.М. Кытманова[12]. При этом, *оставался неисследованным вопрос о голоморфном продолжении наиболее общих функциональных объектов – гиперфункций.* Естественность рассмотрения такого класса функциональных объектов подтверждалась результатом Полкинга и Уэллса[13], согласно которому пространство функций, голоморфных в области с вещественно аналитической границей, изоморфно пространству CR–гиперфункций на границе.

Цель диссертации состоит в развитии теории многомерных преобразований Меллина и их применении к исследованию систем n алгебраических уравнений с n неизвестными, в частности, к описанию дискриминантов таких уравнений. Кроме того, стояла задача исследования условия одностороннего голоморфного продолжения в область для гиперфункций, заданных на вещественно аналитической гиперповерхности.

Методика исследования

Для формулировки и доказательства теорем обращения преобразований Меллина были использованы идеи торической геометрии и интегральное представление Коши-Фантаппье. В нахождении интегральных представлений и степенных рядов для решений систем алгебраических уравнений были применены доказанные в первой главе формулы обращений для преобразований Меллина, а также метод разделяющих циклов в теории многомерных вычетов. Параметризация дискриминантного

[11]Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе.* Новосибирск: Наука. 1990. 246 С.

[12]Кытманов А.М. *Голоморфное продолжение интегрируемых CR–функций с части границы области* // Матем. заметки. 1990.

[13]Polking J.C., Wells R.O.Jr. *Boundary values of Dolbeault cohomology classes and a generalized Bochner–Hartogs theorem* // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1978. V. 47. P. 3–24.

множества осуществлена на основе линеаризации системы уравнений и детальном изучении якобиана линеаризации. Для доказательства критерия голоморфного продолжения CR-гиперфункций были использованы теория вычетов Гротендика и интегральные представления Бохнера-Мартинелли и Коши-Фантаппье.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты имеют теоретическую ценность и могут быть использованы в исследованиях специалистов МИ им. В.А. Стеклова РАН, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, МГУ, НГУ, СФУ, а также университетов Стокгольма, Бордо, Буэнос-Айреса, Беркли, Торонто и др.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу;

- на семинаре по многомерному комплексному анализу в Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова;

- на международных конференциях по комплексному анализу:

  г. Варшава (1997), г. Красноярск (2002, 2007), г. Волгоград (2004), г. Краснодар (2005), г. Уфа (2007);

- на международных симпозиумах „Геометрия и анализ на комплексных алгебраических многообразиях“ в рамках совместного российско-японского проекта: г. Москва (2006), г. Киото (2006), г. Красноярск (2006, 2007), г. Токио (2007).

Публикации

Основные результаты опубликованы в девяти работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста и приложения, где изложены некоторые вспомогательные сведения. Список литературы содержит 98 наименований. Работа изложена на 156 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Характеризуя диссертационную работу в целом можно сказать, что она посвящена развитию техники многомерных интегральных преобразований и ее применению для решения некоторых проблем теории алгебраических уравнений и аналитического продолжения. Изложение начинается с теории многомерных преобразований Меллина (глава 1), где вводятся естественные классы голоморфных функций, между которыми прямое и обратное многомерные преобразования Меллина осуществляют биекцию. Доказанные в этой главе формулы обращения для многомерного преобразования Меллина применяются к решению общего алгебраического уравнения и к исследованию суперпозиции общих алгебраических функций. В главе 2 решается проблема параметризации дискриминантного множества общего полиномиального преобразования $\mathbb{C}^n$ на основе идеи линеаризации. В главе 3 рассматриваются интегральные преобразования Бохнера-Мартинелли, в частности, преобразования, связанные с логарифмическим дифференциалом, и их применения в задачах голоморфного продолжения CR–функций.

Прежде, чем приступить к изложению содержания первой главы, приведем основополагающий результат об одномерных преобразованиях Меллина.

Преобразования Меллина[14] для функций одной переменной были введены им в 1896 году: это прямое преобразование

$$M[\Phi](z) = \int\limits_0^\infty \Phi(x)x^{z-1}dx$$

и обратное преобразование

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)x^{-z}dz.$$

С помощью замены переменной $x = e^{-t}$ эти преобразования сводятся к преобразованиям Лапласа. Меллин ввел свои преобразования в поис-

[14]Mellin H. *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen* // Acta Soc. Sci. Fennica. 1896. V. 21. №1. P. 1–115.

ках обращения преобразований Лапласа. Он догадался о виде обратного преобразования и указал некоторые случаи восстановления оригинала по изображению: $\Phi = M^{-1}M[\Phi]$. Применительно к преобразованию Лапласа такая формула обращения играет большую роль в операционном исчислении и в теории обработки сигналов. Позднее были выделены два класса функций, между которыми M и M^{-1} осуществляют изоморфизм[15] (мы отступаем от принятых обозначений классов с тем, чтобы отразить симметрию между ними):

- класс $M_\delta^{\alpha,\beta}$, $(\delta > 0, \beta > \alpha)$ функций $\Phi(x)$, голоморфных в каком-либо секторе

$$S_{k\delta} = \{x : |\arg x| < k\delta\},\ k > 1$$

и удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= O(x^{-\alpha}) \text{ при } x \to 0, \\ \Phi(x) &= O(x^{-\beta}) \text{ при } x \to \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

а также

- класс $W_{\alpha,\beta}^{\delta}$ функций $F(z) = F(u + iv)$, голоморфных в полосе

$$\{z : \alpha < \Re z < \beta\},$$

и убывающих в ней экспоненциально по v:

$$|F(u + iv)| \leq K(u)e^{-k^{'}\delta|v|},\ k^{'} > 1. \tag{2}$$

Заметим, что условия (1) можно записать в виде

$$\Phi(x) = O(x^{-a}) \text{ для всех } x \in S_{k\delta},\ a \in (\alpha, \beta),$$

и это наблюдение будет основополагающим для формирования многомерной теоремы обращений преобразований Меллина.

В **Главе 1** введены подходящие классы функций многих переменных, для которых справедливы формулы обращения для многомерных преобразований Меллина:

$$MM^{-1} = I = M^{-1}M.$$

[15]Евграфов М.А. *Ряды и интегральные представления.* Анализ–1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 13. М.: ВИНИТИ. 1986. С. 5-92.

Преобразование Меллина функции $\Phi(x)$, заданной в ортанте $\mathbb{R}^n_+$ (произведении положительных вещественных полуосей), определяется интегралом

$$M[\Phi](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Phi(x) x^{z-I} dx, \tag{3}$$

где мультииндексная запись x^{z-I} означает $x_1^{z_1-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{z_n-1}$. Соответственно, обратное преобразование Меллина функции $F(z)$, заданной в мнимом (вертикальном) подпространстве $a + i\mathbb{R}^n$ (a — фиксированный вектор из вещественного подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$), — это интеграл

$$M^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} F(z) x^{-z} dz. \tag{4}$$

Рассмотрим пару выпуклых областей $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Theta \subset \mathbb{R}^n$, причем Θ ограничена и содержит начало координат: $0 \in \Theta$. Область U порождает в комплексном пространстве трубчатую область $U + i\mathbb{R}^n$ (прообраз $\Re^{-1}(U)$ при проектировании $\mathbb{C}^n$ на вещественное подпространство), а Θ — секториальную область $S_\Theta = \mathcal{A}rg^{-1}(\Theta)$ на декартовом произведении римановых поверхностей логарифма.

Итак, пусть:
$\mathbf{M}^{\mathbf{U}}_{\mathbf{\Theta}}$ — векторное пространство функций $\Phi(x)$, голоморфных в какой–либо области

$$S_{k\Theta} = \{x \in \mathfrak{S} : \arg x \in k\Theta\}, \;\; k > 1$$

(k зависит от Φ, а $k\Theta$ означает гомотетию Θ с коэффициентом k) и удовлетворяющих условию

$$|\Phi(x)| \leq C(a)|x^{-a}| \;\; \text{для всех} \;\; x \in S_{k\Theta},\, a \in U, \tag{5}$$

где $C(a)$ не зависит от x;
$\mathbf{W}^{\mathbf{\Theta}}_{\mathbf{U}}$ — векторное пространство функций $F(z) = F(u + iv)$, голоморфных в трубчатой области $U + i\mathbb{R}^n$ и убывающих в ней экспоненциально по v:

$$|F(u + iv)| \leq K(u) e^{-k' H_\Theta(v)},\; k' > 1, \tag{6}$$

где $H_\Theta(v) := \sup\limits_{\theta \in \Theta} \langle \theta, v \rangle$ — опорная функция для Θ.

Преобразования Меллина осуществляют биекцию между классами M^U_Θ, W^Θ_U, о чем гласят следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если $\Phi(x) \in M_{\Theta}^{U}$, то ее преобразование Меллина существует, принадлежит W_{U}^{Θ} и справедлива формула $M^{-1}M[\Phi] = I[\Phi]$, т.е.*

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} x^{-z} dz \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \Phi(\zeta)\zeta^{z-I} d\zeta = \Phi(x), \; x \in S_{k\Theta}, \tag{7}$$

где $a \in U$.

Теорема 1.2. *Если $F(z) \in W_{U}^{\Theta}$, то ее обратное преобразование Меллина существует, принадлежит M_{Θ}^{U} и справедлива формула $MM^{-1}[F] = I[F]$, т.е.*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} x^{z-I} dx \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^n} F(t) x^{-t} dt = F(z), \; z \in U + i\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

где $a \in U$.

Видимо, первое внедрение многомерного преобразования Меллина было сделано также им в статье, цитированной на странице 4. В качестве применения в ней было доказано, что решение общего алгебраического уравнения представляется гипергеометрическим рядом от переменных коэффициентов уравнения. Однако, в указанной краткой статье Меллин ничего не писал о справедливости многомерной формулы обращения — вероятно, в нужном ему примере он знал ее обоснование с помощью повторных одномерных процедур.

Применению формул обращения посвящены разделы 2 и 3 первой главы диссертации. В первом из них обобщается классическое интегральное представление Меллина для решения общего алгебраического уравнения

$$x_n y^n + \cdots + x_1 y + x_0 = 0$$

с комплексными коэффициентами $x_0, \ldots, x_n$. Ввиду свойства двойной однородности решения $y(x_0, \ldots, x_n)$, с помощью мономиальной замены переменных x (с рациональными показателями) коэффициенты при двух мономах y^q, y^p могут быть сделаны единичными. В диссертации исследован случай произвольного q и $p = 0$:

$$x_n y^n + \cdots + y^q + \cdots + x_1 y - 1 = 0. \tag{9}$$

А именно, приведено интегральное представление типа Меллина-Барнса для ветви решения этого уравнения вблизи $x = 0$, выделенной условием $y(0) = 1$ (такую ветвь называем *главным решением* уравнения (9)). Кроме того, найдена область сходимости представляющего интеграла.

Теорема 1.3. *Пусть $y(x)$ — главное решение уравнения (9). Для любого $\mu > 0$ функция $y^\mu(x)$ представляется следующим интегралом Меллина–Барнса*

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{a+i\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mu}{q} \frac{\Gamma(z_1)\ldots[q]\ldots\Gamma(z_n)\Gamma\left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{q}\langle\alpha, z\rangle\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q} + \frac{1}{q}\langle\beta, z\rangle + 1\right)} x^{-z} dz, \tag{10}$$

где $\alpha = (1, ..[q].., n)$, $\beta = (q-1, ..[q].., q-n)$, вектор $a = (a_1, ..[q].., a_n) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ фиксирован и берется из симплекса

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^{n-1} : u_j > 0,\, j = 1, ..[q].., n,\, \langle\alpha, u\rangle < \mu\right\}.$$

Область сходимости интеграла (10) секториальная и в переменных $\theta = \arg x$ определяется неравенствами

$$|\theta_\nu| < \frac{\pi\nu}{q},\, \nu \in I_q,\, |j\theta_k - k\theta_j| < \pi j,\, j, k \in I_q,\, j < k, \tag{11}$$

где I_q — набор индексов $\{1, ..[q].., n\}$.

В случае $q = n$ формула (10) была известна Меллину, однако, он гарантировал сходимость интеграла в значительно меньшей области

$$|\theta_\nu| < \frac{\pi\nu}{2n},\, \nu = 1, \ldots, n-1.$$

Для того, чтобы сопоставить область сходимости интеграла (10) с сингулярным множеством полной (многозначной) алгебраической функции $y(x)$, заметим, что последнее множество есть не что иное как дискриминантная гиперповерхность ∇ уравнения (9). Рассмотрим образ ∇ при отображении $Arg : \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$:

$$(x_1, ..[q].., x_n) \to (\arg x_1, ..[q].., \arg x_n).$$

Указанный образ называют *коамебой* гиперповерхности $\nabla \subset \mathbb{T}^{n-1}$, по той причине, что образ ∇ при проекции

$$(x_1, ..[q].., x_n) \to (\log|x_1|, ..[q].., \log|x_n|)$$

называют *амебой*[16] для ∇. Например, для кубического уравнения ($n = 3$, $p = 0$, $q = 3$) дискриминант равен

$$D(x) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2 - x_1^2x_2^2,$$

а его коамеба изображена серым цветом на рис. 1 в рамках квадрата $|\theta_1| \leq \pi$, $|\theta_2| \leq \pi$.

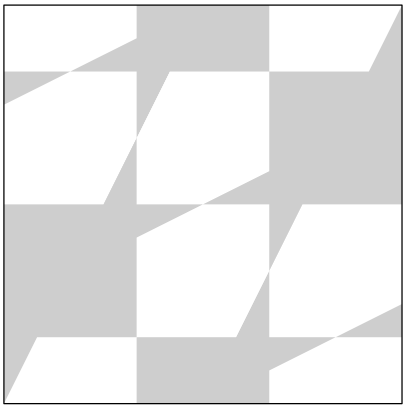

Рис.1. Коамеба дискриминанта кубического уравнения.

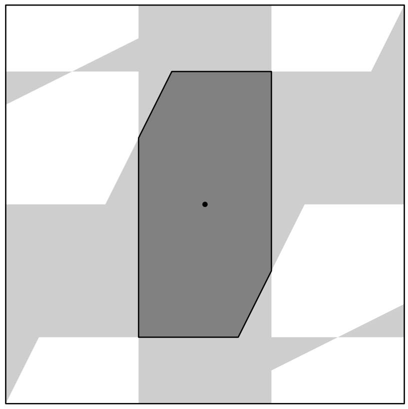

Рис.2. Область сходимости интеграла Меллина–Барнса.

Для данного случая Меллин гарантировал сходимость интеграла в области $|\theta_1| < \frac{\pi}{6}$, $|\theta_2| < \frac{\pi}{3}$, в то время как истинная область сходимости, в соответствии с (11), есть

$$|\theta_1| < \frac{\pi}{3},\ |\theta_2| < \frac{2\pi}{3},\ |\theta_2 - 2\theta_1| < \pi;$$

она изображена на рис. 2 черным цветом.

В разделе 3 исследуется суперпозиция общих алгебраических функций. Известно, что суперпозицию n алгебраических функций[17] можно проинтерпретировать как n-ю координату y_n решения системы n алгебраических уравнений „треугольного вида", причем под „треугольностью" понимается, что первое уравнение зависит только от первой неиз-

[16]Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A., цит. выше.

[17]Васильев В.А. *Топология дополнений к дискриминантам.* М: ФАЗИС. 1997. XIV+538 С.

вестной переменной, второе – от первой и второй и т.д. Такую треугольную систему запишем в виде:

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda\in\Lambda_i} x_\lambda y_1^{\lambda_1}\dots y_i^{\lambda_i} - 1 = 0,\ i = 1,\dots,n, \tag{12}$$

где в i-м уравнении суммирование ведется по множеству мультииндексов $\Lambda_i = \Lambda_i^{'} \times [1, m_i - 1]$, $\Lambda_i^{'} \subset \mathbb{Z}_+^{i-1}$ – конечные множества. Набору показателей $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_i) \in \mathbb{Z}_+^i$ в i-м уравнении соответствует коэффициент x_λ. Вектор из коэффициентов системы обозначим x. В теоремах 1.5, 1.6 диссертации приведены интегральная формула и ряд Тейлора для мономиальной функции

$$y^\mu(x) = y_1^{\mu_1}(x)\dots y_n^{\mu_n}(x),\ \mu_i > 0,$$

составленной из координат ветви $y(x) = (y_1(x),\dots,y_n(x))$, выделенной условиями $y_i(0) = 1$, $i = 1,\dots,n$. Теоремы 1.5, 1.6 обобщают классический результат Меллина, их итоговым следствием является

Теорема 1.7. *Мономиальная функция $y^\mu(x)$ разлагается в ряд гипергеометрического типа. В частности, суперпозиция $y_n(x)$ общих алгебраических функций представляется в виде отношения двух рядов гипергеометрического типа.*

Во **второй главе** исследуется дискриминантное множество общего полиномиального преобразования

$$P = (P_1,\dots,P_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

пространства $\mathbb{C}^n$. Считаем, что множества $A^{(i)}$ показателей мономов в P_i фиксированы, а все коэффициенты переменные. В таком случае мы говорим, что P – *общее полиномиальное преобразование пространства* $\mathbb{C}^n$.

Для большей общности рассматривается отображение

$$P : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^n,$$

где $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ - комплексный тор, а P_i - полиномы Лорана.

Для таких отображений обозначим через ∇^0 множество всех коэффициентов, при которых P имеет в $\mathbb{T}^n$ кратные нули, т.е. нули, в которых якобиан P равен нулю.

Определение. *Дискриминантным множеством* ∇ *отображения* P *назовем замыкание множества* ∇^0 *в пространстве коэффициентов.*

Таким образом, для нас представляет интерес система полиномиальных уравнений вида

$$\sum_{\lambda \in A^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \ i = 1, \dots, n \tag{13}$$

с неизвестными $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{T}^n$, где $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ – конечные подмножества, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \dots y_n^{\lambda_n}$ и $x_\lambda^{(i)}$ переменные коэффициенты.

Следуя идеологии монографии[18], введенное дискриминантное множество ∇ уместно назвать $(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$-*дискриминантным множеством.*

Дискриминантное множество ∇ не всегда имеет коразмерность 1. Например, для общей системы n линейных уравнений дискриминантное множество задается одновременными нулями всех миноров порядка n расширенной матрицы системы.

Основной результат второй главы состоит в параметризации дегомогенизированного дискриминантного множества (Теорема 2.2), которое соответствует *приведенной* системе полиномиальных уравнений

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda \in A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \ i = 1, \dots, n. \tag{14}$$

Например, для дискриминантного множества классического приведенного уравнения

$$y^m + x_{m-1} y^{m-1} + \dots + x_1 y - 1 = 0 \tag{15}$$

такая параметризация имеет вид[19]

$$x_\lambda = -\frac{m s_\lambda}{\langle \beta, s \rangle} \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\lambda/m}, \ \lambda = 1, \dots, m-1,$$

где $\alpha = (1, \dots, m-1)$ – это вектор из показателей мономов y, y^2,..., y^{m-1} уравнения (15), а $\beta = -(m-1, m-2, \dots, 1)$.

[18] Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A., цит. выше.
[19] Passare M., Tsikh A., цит. выше.

Возможность приведения системы (13) к виду (14) обусловлена наличием свойства полиоднородности ее решения. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. *1) Если для любого набора n пар $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in A^{(i)}$ показателей системы (13) определители*

$$\delta_{\lambda\mu} = det(\lambda_j^{(i)} - \mu_j^{(i)})$$

равны нулю, то система (13) зависит от $n-1$ неизвестных и потому якобиан отображения P есть тождественный нуль.

2) Если хотя бы один из определителей $\delta_{\lambda\mu}$ не равен нулю, то с помощью мономиального преобразования коэффициентов $x_\lambda^{(i)}$ системы (13) ее можно свести к приведенной системе (14).

Множества показателей $A^{(i)} \setminus \{\omega^{(i)}, \bar{0}\}$ в системе (14) обозначим $\Lambda^{(i)}$. Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$, которое представим в виде матрицы

$$\Lambda = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^N\right), \tag{16}$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ из показателей мономов системы (14). Обозначим матрицу из вектор-столбцов $\omega^{(1)}$,..., $\omega^{(n)}$ в (14) через ω. По теореме об инвариантных делителях[20] существуют унимодулярные матрицы A и B такие, что выполняется

$$A\omega B = D_m, \tag{17}$$

где D_m – диагональная матрица с целыми $m_1, \ldots, m_n$ на диагонали. Введем матрицу

$$\Phi := BD_m^{-1}A\Lambda.$$

Строки матрицы Φ далее будем обозначать $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Обозначим через $\chi^{(i)}$ характеристические функции подмножеств $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$ системы (14); отождествим $\chi^{(i)}$ с векторами, имеющими координаты $\left(\chi^{(i)}(\lambda)\right)_{\lambda\in\Lambda}$. Наряду с векторами φ_i будем рассматривать векторы $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \chi^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$.

[20] Curtis Ch., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Wiley. 1988.

Определим алгебраическое (многозначное) отображение

$$\Delta : \mathbb{CP}^{N-1} \to \mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{|\Lambda^{(1)}|} \times \cdots \times \mathbb{C}^{|\Lambda^{(n)}|}$$

из проективного пространства в пространство коэффициентов $\{x_\lambda\}$ системы (14), полагая

$$\Delta(s) = \left(\ldots, \left\{ -\frac{s_\lambda}{\langle \tilde{\varphi}_i, s \rangle} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}_j, s \rangle}{\langle \varphi_j, s \rangle} \right)^{\hat{\lambda}_j} \right\}_{\lambda \in \Lambda^{(i)}}, \ldots \right),$$

где $(\hat{\lambda}_j) = BD_m^{-1}A\lambda$.

Напомним понятие логарифмического отображения Гаусса[21] гиперповерхности $V = \{f = 0\} \subset \mathbb{T}^N$. Оно представляет собой отображение

$$\gamma : V \to \mathbb{CP}^{N-1}$$

с координатами $\gamma_\nu(x) = x_\nu \partial f(x)/\partial x_\nu$. Геометрическая интерпретация γ состоит в том, что вектор $\gamma(x)$ задает нормальную прямую к гиперповерхности $\mathrm{Log}(V)$ в точке $\mathrm{Log}(x) = (\log x_1, \ldots, \log x_N)$, и эта нормаль определяет точку в $\mathbb{CP}^{N-1}$.

Основной результат второй главы составляет

Теорема 2.2. *Пусть все строки матрицы Φ ненулевые и дискриминантное множество ∇ системы (14) неприводимо. Тогда отображение Δ параметризует ∇. В случае, когда ∇ есть гиперповерхность, это отображение является обратным к логарифмическому отображению Гаусса $\gamma : \nabla \to \mathbb{CP}^{N-1}$.*

Отметим, что требование неприводимости не является существенно ограничительным. Например, применительно к системе (13) условие приводимости равносильно тому, что какая-то группа из $k < n$ уравнений зависит лишь от k неизвестных.

Пример. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} y_1^3 + a y_1 y_2 - 1 = 0, \\ y_2^3 + b y_1 y_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

[21] Kapranov M., цит. выше.

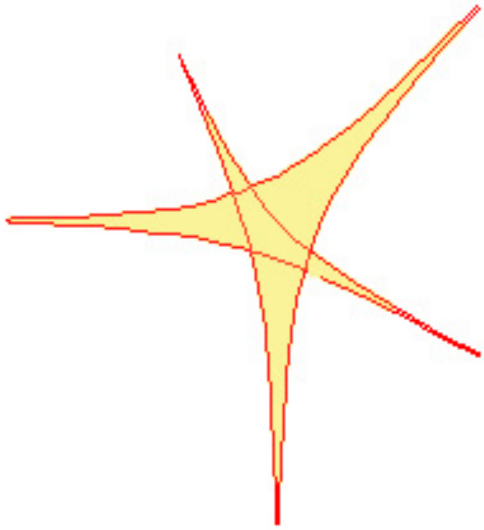

Рис. 3. Амеба дискриминанта и ее контур.

Для нее параметризация дискриминантного множества имеет вид:

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{3}{-2+s}\left(\tfrac{-2+s}{1+s}\right)^{1/3}\left(\tfrac{1-2s}{1+s}\right)^{1/3}, \\ b &= -\tfrac{3s}{1-2s}\left(\tfrac{-2+s}{1+s}\right)^{1/3}\left(\tfrac{1-2s}{1+s}\right)^{1/3}. \end{aligned} \tag{18}$$

Дискриминант $D(a,b)$, получаемый исключением параметра s в (18), равен

$$a^4b^2 - 4a^3 - 27 + 6a^2b + 6ab^2 - 2a^3b^3 - 4a^3 + a^2b^4.$$

На рисунке 3 изображена амеба дискриминантного множества $\nabla = \{D(a,b) = 0\}$, где выделенные линии составляют *контур* амебы[22], который определяется как множество критических значений логарифмического проектирования. Из рисунка видно, что нормаль к контуру амебы при полном его обходе делает один оборот, и это подчеркивает, что параметризация Δ является обратным отображением к логарифмическому отображению Гаусса для ∇.

Глава 3 диссертации посвящена применению интегральных преобразований в задачах аналитического продолжения. А именно, в ней

[22]Passare M., Tsikh A. *Amoebas: their spines and their contours* // Contemporary math. 2005. V. 377. P. 275-288.

изучаются условия голоморфного продолжения CR–гиперфункций, заданных на произвольной вещественно аналитической гиперповерхности. Эти условия задаются в терминах логарифмического преобразования Бохнера-Мартинелли.

Рассмотривается произвольная область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ и в ней вещественно аналитическая гиперповерхность

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \rho(z) = 0\},$$

где ρ — вещественно аналитическая функция такая, что $d\rho \neq 0$ на Γ. Предполагается, что Γ связна и что она разбивает Ω на два открытых множества $\Omega^{\mp} = \{\rho(z) \lesseqgtr 0\}$.

В главе 3 исследуется задача о продолжении CR–гиперфункции, заданной на Γ, в множество Ω^+. В случае, когда $\Omega = \mathbb{C}^n$, а Γ – замкнутая гиперповерхность, ограничивающая область Ω^+, для обычных гладких на Γ функций Ψ указанная задача разрешима всегда, о чем свидетельствует известная теорема Бохнера–Севери. В этом случае продолжение для функции Ψ в Ω^+ осуществляется интегральным преобразованием Бохнера–Мартинелли этой функции, суженным на Ω^+. При этом указанное преобразование равно нулю на Ω^-, и тем самым, оно вещественно аналитически продолжается в Ω^+ через Γ. Основной результат третьей главы (Теорема 3.6) гласит, что это свойство продолжимости преобразования Бохнера–Мартинелли является определяющим для формулировки критерия продолжимости гиперфункции с Γ в Ω^+. Для большей общности используется логарифмическое преобразование Бохнера–Мартинелли, ассоциированное с голоморфным отображением f (в случае, когда f – тождественно, получается обычное преобразование Бохнера–Мартинелли). Указанная общность позволит нам получить признак продолжения с Γ любой CR–гиперфункции, используя язык комплексной аналитической геометрии.

В работе используется определение гиперфункции предложенное Мартино[23 ,24]. Гиперфункции в $\mathbb{R}^n$ определяются таким образом[25], чтобы локально они были эквивалентны аналитическим функционалам в $\mathbb{C}^n$ с компактными носителями из $\mathbb{R}^n$. Пространства аналитических функционалов обозначаются $\mathcal{A}'$, а гиперфункций – $\mathfrak{B}$.

[23] Martineau A. *Les hyperfonctions de M. Sato.* Sém. Bourbaki 1960-1961. Exposé №214.

[24] Шапира П. *Теория гиперфункций.* М.: Мир, 1972.

[25] Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир. 1986. 462 С.

Для определения CR–гиперфункций введем набор векторных полей $L_{\alpha\beta}$, порождающих антиголоморфную часть касательного расслоения к Γ:

$$L_{\alpha\beta} = \frac{(2i)^n}{2|\partial\rho|}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\beta} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\alpha}\right),\ 1 \leq \alpha < \beta \leq n,$$

где

$$|\partial\rho| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\right|^2}.$$

Для компакта $K \subset \Gamma$ под действием $L_{\alpha\beta}$ на аналитический функционал $\Psi \in \mathcal{A}'(K)$ будем понимать значение

$$\langle L_{\alpha\beta}\Psi, \varphi\rangle = \langle \Psi, L_{\alpha\beta}\tilde{\varphi}\rangle\,,$$

где $\tilde{\varphi}$ — вещественное аналитическое продолжение функции $\varphi \in \mathcal{A}(\Gamma)$ в некоторую окрестность Γ. Результат действия $L_{\alpha\beta}\tilde{\varphi}$ не зависит от продолжения φ в окрестность Γ, так как $L_{\alpha\beta}$ есть касательный оператор.

Пусть S — открытое подмножество гиперповерхности Γ. Выберем на нем семейство координатных окрестностей $S_j \subset S$ ($\cup S_j = S$).

Определение. *Гиперфункция $\Psi \in \mathfrak{B}(\Gamma)$, заданная набором гиперфункций $\Psi_j \in \mathfrak{B}(S_j)$, удовлетворяет на S касательным условиям Коши–Римана, если для каждого представителя $f_j \in \mathcal{A}'(\bar{S}_j)$ гиперфункции Ψ_j выполняются включения*

$$\mathrm{supp} L_{\alpha\beta} f_j \subset \partial S_j,\ 1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n.$$

Гиперфункция $\Psi \in \mathfrak{B}(\Gamma)$, удовлетворяющая на $S \subset \Gamma$ касательным условиям Коши–Римана, называется CR–гиперфункцией на S.

Обозначим через E_Ω разность по Минковскому

$$\Omega - \Omega = \{\zeta - z : \zeta, z \in \Omega\}.$$

Пусть U — область голоморфности, содержащая E_Ω. Рассмотрим голоморфное отображение

$$f(w) = (f_1(w), \ldots, f_n(w)) : U \to \mathbb{C}^n,$$

имеющее в U единственный нуль $w = 0$ кратности μ и сопоставим ему $\bar{\partial}$–замкнутую дифференциальную форму (*логарифмический дифференциал*

Бохнера–Мартинелли) $\omega(f(\zeta - z))$, где ω – дифференциальная форма Бохнера-Мартинелли[26 ,27]

$$\omega(u) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{u_k}}{|u|^{2n}} d\bar{u}[k] \wedge du.$$

В разделе 3.4 диссертации доказан ряд утверждений, имеющих самостоятельный интерес и устанавливающих когомологическую связь логарифмического дифференциала с формой Коши–Фантаппье специального вида.

Для формулировки этой связи рассмотрим представления

$$f_i(w) = \sum_{k=1}^{n} w_k P_{ik}(w),\ i = 1, \ldots, n$$

с $P_{ik} \in \mathcal{O}(U)$, которые получаются из разложений Хефера с учетом условий $f_i(0) = 0$.

Для вектор–функции $\lambda(\zeta, z) = (\lambda_1(\zeta, z), \ldots, \lambda_n(\zeta, z))$ с координатами

$$\lambda_k(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}(\zeta - z) \bar{f_i}(\zeta - z)$$

рассмотрим дифференциальную форму Коши–Фантаппье

$$\omega(\zeta - z, \lambda) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\lambda_k(\zeta, z) d\lambda[k]}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta, z) \rangle^n} \wedge d\zeta. \tag{19}$$

Обозначим через μ кратность отображения f в точке $w = 0$.

Теорема 3.5. *Форма Коши–Фантаппье, умноженная на кратность μ, и логарифмический дифференциал Бохнера–Мартинелли $\bar{\partial}$ – когомологичны в области $\zeta \neq z$:*

$$\mu\omega(\zeta - z, \lambda(\zeta, z)) - \omega(f(\zeta - z)) = \bar{\partial}\chi(\zeta, z) \wedge d\zeta.$$

[26] Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения.* Новосибирск: Наука. 1992. 240 С.

[27] Lieb I., Michel J. *The Cauchy-Riamann Complex (Integral Formulae and Neumann Problem).* Aspects of Math. E 34. Vieweg. 2002.

Для гиперфункции Ψ с компактным носителем на Γ определим логарифмическое преобразование Бохнера–Мартинелли:

$$\mathcal{F}[\Psi](z) = \left\langle \Psi_\zeta, \frac{\omega(f(\zeta - z))|_\Gamma}{d\sigma(\zeta)} \right\rangle,$$

$d\sigma(\zeta)$ — элемент поверхности Γ. Заметим, что $\mathcal{F}[\Psi](z)$ — вещественно аналитическая функция вне носителя Ψ.

Грубо говоря, основной результата главы 3, Теорема 3.6, утверждает, что заданная на вещественно аналитической гиперповерхности CR–гиперфункция Ψ продолжается в одну из сторон гиперповерхности тогда и только тогда, когда ее логарифмическое преобразование Бохнера–Мартинелли продолжается вещественно аналитически из другой стороны. Для более точной формулировки необходимо исчерпать область Ω монотонным семейством ограниченных областей Ω_j и произвести локализацию заданной гиперфункции Ψ на Γ в виде гиперфункций Ψ_j с компактным носителем на $\bar{S}_{j+1}$.

Теорема 3.6. *Если Ψ есть CR–гиперфункция на Γ, то для голоморфного продолжения Ψ в Ω^+ необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{F}[\Psi_j](z)$ продолжались вещественно аналитически из связной компоненты $\Omega^- \cap \Omega_j$ в Ω_j для всех j.*

В качестве применения этого критерия приводится достаточное геометрическое условие на гиперповерхность Γ, обеспечивающее одностороннее локальное голоморфное продолжение с Γ любой CR–гиперфункции.

Теорема 3.7. *Если в точке p гиперповерхности Γ существует росток голоморфной кривой $\{f_1 = \cdots = f_{n-1} = 0\}$, расположенный в Ω^+, то всякая CR–гиперфункция Ψ на Γ голоморфно продолжается в некоторую одностороннюю окрестность $V_p^- \subset \Omega^-$ этой точки.*

Этот результат обобщает теорему Леви[28] и ее аналог для интегрируемых функций[29]. Последняя из упомянутых теорем утверждает, что интегрируемая CR–функция, заданная на дважды гладкой вещественной

[28] Levi H. *On the local character of the solution of an atypical liner differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables* // Ann. of Math. 1956. V. 64. P. 514–522.

[29] Хенкин Г.М., Чирка Е.М. *Граничные свойства голоморфных функций нескольких переменных.* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ. 1975. С. 13–142.

гиперповерхности Γ голоморфно продолжается в окрестность U точки $0 \in \Gamma$, если сужение формы Леви в нуле на комплексную касательную плоскость $T_0^c(\Gamma)$ не равно тождественно нулю. Невырожденность формы Леви влечет за собой возможность коснуться гиперповерхности в нуле комплексной кривой, лежащей в области $\{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(z) > 0\}$, т.е. условие Теоремы 3.7 выполняется. Однако, обратная импликация неверна. Это показывает следующий пример гиперповерхности

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^2 : \rho(z) = \mathrm{Re}(z_2 - \bar{z}_1^2 + |z_1|^4 + |z_2|^8) = 0\}.$$

Для нее форма Леви в точке $0 \in \Gamma$ тождественно равна нулю. При этом кривая $\gamma = \{z_1 = t,\ z_2 = t^2\}$, расположенная в области $\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) > 0\}$, касается Γ в точке нуль, поскольку

$$\rho|_\gamma = \mathrm{Re}(t^2 - \bar{t}^2 + |t|^4 + |t|^8) = |t|^4 + |t|^8 \geq 0.$$

Кроме того, $\rho|_\gamma = 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации следующие:

- Решена проблема обращения для многомерных преобразований Меллина с описанием зеркально–симметричных векторных пространств, переводимых друг в друга указанными преобразованиями.

- Получены новые формулы для решения общего алгебраического уравнения, уточнен классический результат Меллина о сходимости интеграла, представляющего решение.

- Предъявлены формулы для суперпозиции общих алгебраических функций.

- Найдена параметризация неприводимого дискриминантного множества общего полиномиального преобразования $\mathbb{C}^n$.

- Получен критерий голоморфного продолжения CR-гиперфункций в терминах логарифмического преобразования Бохнера–Мартинелли.

Работы автора по теме диссертации

1. Кытманов А.М., Цих И.А. (Антипова И.А.) О голоморфном продолжении CR–гиперфункций в фиксированную область // Сиб. матем. журн. 1997. V. 38. №6. С. 1319–1334.

2. Кытманов А.М., Цих И.А. (Антипова И.А.) Об устранении особенностей CR–гиперфункций, заданных на гиперповерхности // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. Вып. 2. С. 441-454.

3. Антипова И.А. Применение логарифмического дифференциала к задаче голоморфного продолжения CR-гиперфункций // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41. № 6. С. 1238-1251.

4. – Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. №5. С. 972–980.

5. – Об аналитическом продолжении суперпозиции общих алгебраических функций // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки. 2004. №1. С. 99–104.

6. – О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки. 2005. №1. С. 106–111.

7. – Обращения многомерных преобразований Меллина // УМН. 2007. Т. 62. Вып. 5(377). С. 147-148.

8. – Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 4. С. 3-20.

9. – О параметризации дискриминантного множества для общего полиномиального преобразования $\mathbb{C}^n$ // Доклады РАН. 2008. Т. 422. № 4. С. 439-442.

Подписано в печать	$60 \times 84/16$
Бумага офсетная N 1	Печать офсетная
Усл. печ. л. 2	Усл. изд. л. 2
Тираж 100 экз.	Заказ N

Издательский центр
Сибирского федерального университета.

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.