На правах рукописи

Франчук Светлана Константиновна

НЕПРИВОДИМЫЕ КОВРЫ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП НАД ПОЛЯМИ

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2021

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, профессор **Нужин Яков Нифантьевич**

Официальные оппоненты:
Зенков Виктор Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник отдела алгебры и топологии;

Тимошенко Егор Александрович, д-р физ.-мат. наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», профессор кафедры алгебры механико-математического факультета.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «8» октября 2021 года в 15:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http://www.sfu-kras.ru/.

Автореферат разослан «___» ____________ 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного совета	Михалкин Евгений Николаевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Данная работа посвящена изучению подгрупп групп Шевалле, определяемых коврами — наборами аддитивных подгрупп основного кольца определения.

Наборы идеалов и в общем случае аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \qquad (1)$$

определенного ассоциативного, необязательно коммутативного, кольца с условиями

$$\mathfrak{S}_{ir}\mathfrak{S}_{rj} \subseteq \mathfrak{S}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, \qquad (2)$$

возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщенными конгруэнц-подгруппами и др. Аддитивные подгруппы возникают в силу определения сложения матриц, а включения (2) происходят из матричного умножения и согласуются с коммутированием трансвекций, что и определяет различные приложения наборов (1) с включениями (2). Первыми, кто систематически применял в своих исследованиях такие наборы, были Ю.И. Мерзляков[2], Н.С. Романовский[3], З.И. Боревич[4] [5].

Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле нормальных и скрученных типов различными способами (К. Сузуки[6], Н.А. Вавилов[7], В. М. Левчук [8] [9]). Убрав из набора (1) все диагональные подмножества $\mathfrak{S}_{ii}$, мы получим элементарный ковер. Тогда элементарная ковровая подгруппа по определению совпадает с группой, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in \mathfrak{S}_{ij}$. Элементарная

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов: 16-01-00707 и 19-01-00566) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

[2]Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп // Алгебра и логика. Семинар — Т. 3. — № 4 — 1964. — С. 49–59.

[3]Романовский Н.С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом. // Математические заметки. — Т. 9. — № 6. — 1971. — С. 699–708.

[4]Боревич З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ.— 1976.—Т. 13.—№ 3.—С. 16-24.

[5]Боревич З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом // Вестник ЛГУ.— 1976.—Т. 19.—№ 4.—С. 29-34.

[6]Suzuki K. On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings, Tohoku Math. J., 29(1976), №1, p. 57–66.

[7]Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — Т. 75.—1978. — С. 43–58.

[8]Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 7-е изд. Новосибирск, ИМ СО РАН, 1980.

[9]Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Математические заметки. — 1982. — Т. 31. — № 4. — С. 509-525.

группа Шевалле типа A_{n-1} над коммутативным кольцом K изоморфна подгруппе специальной линейной группы $SL_n(K)$, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$, u. При этом изоморфизме корневым элементам $x_r(u)$ определенным образом соответствуют трансвекции $t_{ij}(u)$. Учитывая данный изоморфизм, К. Сузуки[10] для каждой системы корней Φ называет ковром (в оригинале "carpet") типа Φ над кольцом K всякий набор его идеалов $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ с условием

$$\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_s \subseteq \mathfrak{A}_{r+s}, \text{ при } r, s, r+s \in \Phi, \tag{3}$$

и описывает в терминах ковровых подгрупп параболические подгруппы групп Шевалле над локальными кольцами с некоторыми ограничениями на их мультипликативные группы. Перенося эти результаты на полулокальные кольца, Н.А. Вавилов[11] [12] называет наборы идеалов с условиями (3) сетями, а затем, описывая параболические подгруппы скрученных групп Шевалле, вводит аналог понятия сети для данных групп. В.М. Левчук заменил условия (3) в определении ковра на следующие включения

$$C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir+js \in \Phi, \ i > 0, \ j > 0, \tag{4}$$

где $C_{ij,rs}$ — структурные константы из коммутаторной формулы Шевалле, которые могут принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, а $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i | a \in \mathfrak{A}_r\}$[13]. При этом набор $\{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ не обязан состоять только из идеалов, в общем случае его элементами являются аддитивные подгруппы. Данное определение оказалось более естественным и позволило снять возникающие ранее ограничения на мультипликативную группу основного кольца в различных задачах, в частности, при описании параболических подгрупп. Отметим также, что в случае когда в системе корней, ассоциированной с группой Шевалле, все корни имеют одинаковую длину, то условия (3) и (4) совпадают.

С одной стороны, определения ковра и ковровой подгруппы возникали как инструмент при вычислении центральных и коммутаторных рядов определенных матричных групп над кольцами, а также при описании различных промежуточных подгрупп в группах Шевалле, в первую очередь, при описании параболических подгрупп, надгрупп диагональной

[10]Suzuki K. On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings, Tohoku Math. J., 29(1976), №1, p. 57–66.

[11]Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — Т. 75.—1978. — С. 43–58.

[12]Вавилов Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом // Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР. — Т. 94.—1979. — С. 21–36.

[13]Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Математические заметки. — 1982. — Т. 31. — № 4. — С. 509-525.

подгруппы и групп, лежащих между группами лиева типа над кольцом и его подкольцом. С другой стороны, ковровые подгруппы можно рассматривать как обобщение исходных групп Шевалле и изучать их структуру, что и делается в настоящей диссертации. Ключевыми понятиями для ковров являются неприводимость и замкнутость. По определению ковер называется замкнутым, если его ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов, и он неприводим, если все его аддитивные подгруппы ненулевые. На важность понятия замкнутости (в другой терминологии допустимости)[14] указывает следующий открытый вопрос, который записал В.М.Левчук[15] еще в 1980 г.

Какие условия на ковер $\mathfrak{A}$ *(в терминах* $\mathfrak{A}_r$*) над коммутативным кольцом* K *необходимы и достаточны для того, чтобы ковер* $\mathfrak{A}$ *был допустимым?* (вопрос 7.28).

Отметим также один вопрос Я.Н.Нужина[16], ответ на который неизвестен даже для матричных элементарных ковров над кольцами четной характеристики.

Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ *— элементарный ковер типа* Φ *над коммутативным кольцом* K *и* $\mathfrak{A}_r^2 = \{t^2 \mid t \in \mathfrak{A}_r\}$. *Являются ли включения* $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r, r \in \Phi$ *достаточными для замкнутости (допустимости) ковра* $\mathfrak{A}$ *типа* Φ*?* (вопрос 19.63)

Целью работы является описание неприводимых ковров лиева типа при определенных ограничениях на аддитивные подгруппы ковра и основное поле коэффициентов.

Основные результаты работы:

1. Для коммутативных колец с единицей, ненулевым идеалом I и аддитивной подгруппой J такими, что $\mathbb{Z} + I \neq \mathbb{Z} + I + J$, доказано существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа, ассоциированных с любой системой корней [1].

2. Доказано, что любой ковер ненулевых аддитивных подгрупп, ассоциированный с группой Шевалле лиева ранга больше единицы над локально конечным полем, с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадает с ковром, все аддитивные подгруппы которого равны некоторому фиксированному подполю основного поля [2].

[14] Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Математические заметки. — 1982. — Т. 31. — № 4. — С. 509-525.

[15] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 7-е изд. Новосибирск, ИМ СО РАН, 1980.

[16] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 19-е изд. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2018.

3. Описаны неприводимые ковры типа G_2 над полем K характеристики $p > 0$, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, в случае когда K — алгебраическое расширение поля R. Доказано, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться двумя различными полями только при $p = 3$, а для других p они определяются одним полем и в этом случае соответствующие им ковровые подгруппы с точностью до сопряжения диагональным элементом совпадают с группами Шевалле типа G_2 над промежуточными подполями P, $R \subseteq P \subseteq K$ [3], [4].

Методы исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость. В работе используются методы линейной алгебры, теории полей и теории групп. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Результаты диссертации представляют теоретический интерес и вносят заметный вклад в теорию линейных групп и групп лиева типа. Кроме того, результаты можно ввести в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов для студентов, магистрантов и аспирантов кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на Красноярском алгебраическом семинаре (Сибирский федеральный университет, 2016–2021 гг.) и следующих конференциях:

1. Международная конференция "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2016 г., 2020 г.);

2. Российская научная конференция "Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования"(Владикавказ, 2017г.);

3. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 2018г.).

Основные публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1] — [11]. Основные результаты диссертации опубликованы в [1] — [4] в изданиях, входящих в перечень ВАК рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех глав основного содержания, заключения, глоссария и списка литературы. Список цитированной литературы состоит из 28 наименований, а список работ автора из 11 наименований. Вся работа изложена на 62 страницах и включает в себя 11 рисунков. Главы подразделяются на параграфы. Основные результаты сформулированы в виде теорем. В автореферате нумерация утверждений сохраняется в соответствии с диссертацией.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** рассматриваются ковры и ковровые подгруппы над произвольным коммутативным кольцом. В **параграфах 1.1 - 1.3** приводятся определения ковра и ковровой подгруппы, а также приведены два примера, которые дают отрицательный ответ на следующий вопрос: *будет ли подгруппа* M*, порожденная своими пересечениями* $M \cap X_r, \quad r \in \Phi$ *ковровой?* [17]. В **параграфе 1.4** доказана следующая теорема, которая является основным результатом данной главы

Теорема 1.1. *Пусть* K *— коммутативное кольцо с единицей* 1*,* $\mathbb{Z}$ *— кольцо целых чисел и пусть в* K *существуют ненулевой идеал* I *и аддитивная подгруппа* J *такие, что* $\mathbb{Z}+I \neq \mathbb{Z}+I+J$*. Тогда для любой системы корней* Φ *существует неприводимый незамкнутый ковер типа* Φ *над* K*.*

Теорема 1.1 обобщает методы построения примеров незамкнутых неприводимых матричных ковров, предложенных в 2011 году В.А. Койбаевым[18] и переносит их на ковры лиева типа. Она дает примеры незамкнутых неприводимых ковров любого типа Φ над различными коммутативными кольцами. В этих примерах все подковры $\{\mathfrak{A}_r, \ \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1 замкнутые, за исключением лишь одного. Поэтому данные примеры являются предельными в связи со следующим известным вопросом В. М. Левчука[19].

Верно ли, что для замкнутости (допустимости) ковра $\mathfrak{A}$ *типа* Φ *над полем* K *необходима и достаточна замкнутость (допустимость) его подковров* $\{\mathfrak{A}_r, \ \mathfrak{A}_{-r}\}$*,* $r \in \Phi$*, ранга* 1*?* (вопрос 15.46).

В теореме 1.1 случай G_2 рассмотрен автором диссертации лично, а остальные типы получены в неразделимом соавторстве с А.О. Лихачевой и Я.Н. Нужиным, исключая тип F_4, который рассмотрен А.О. Лихачевой.

Результаты главы 1 опубликованы в [1].

Глава два посвящена описанию неприводимых ковров над локально конечным полем. В **параграфе 2.1** приведены ключевые леммы, которые существенно используются при доказательствах основных результатов, как главы 2, так и главы 3.

---

[17] Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирского федерального ун-та.—2011.—Т. 4, № 4.— С. 527-535.

[18] Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2011.— Т. 17. № 4.— С. 134–141.

[19] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 18-е изд. Новосибирск, ИМ СО РАН, 2014, 253 с.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — *неприводимый ковер типа* Φ *ранга* $l \geq 2$ *над локально конечным полем* K. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле* $\hat{\Phi}(K)$ *все аддитивные подгруппы* $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *в частности, ковер* $\mathfrak{A}$ *замкнут.*

Теорема 2.1 доказана в **параграфе 2.2**, а в **параграфе 2.3** получен аналогичный результат (теорема 2.2) для полного матричного ковра любого ранга (степени). Утверждение теоремы 2.1 ранее доказал В. М. Левчук[20], исключая случаи, когда система корней типа B_l, C_l и F_4 и характеристика поля равна 2 и система корней типа G_2, характеристика поля равна 2 и 3[20]. С другой стороны, в этой же статье[20] установлен критерий замкнутости любого ковра лиева типа над локально конечным полем. Теорема 2.1 усиливает этот результат для неприводимых ковров, так как в предположениях теоремы не накладывается условие замкнутости ковра $\mathfrak{A}$. Отметим также, что Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев и Я. Н. Нужин[21] доказали, что любой неприводимый матричный ковер степени $n \geq 3$ над полем рациональных чисел замкнут. Для всех групп лиева типа подобный результат анонсировался С. А. Зюбиным в 2016 году в трудах Международной конференции "Алгебра и логика: теория и приложения"[22].

Теоремы 2.1 и 2.2 получены в неразделимом соавторстве с В.А. Койбаевым, А.О. Лихачевой и Я.Н. Нужиным, случай G_2 рассмотрен автором диссертации лично, а тип F_4 получен А.О. Лихачевой.

Результаты главы 2 опубликованы в [2].

Основным результатом **главы три** является

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — *неприводимый ковер типа* G_2 *над полем* K *характеристики* $p > 0$. *Предположим, что хотя бы одна из аддитивных подгрупп* $\mathfrak{A}_r$ *является* R*-модулем, где* K — *алгебраическое расширение поля* R. *Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из группы Шевалле* $G_2(K)$ *при* $p \neq 3$ *все* $\mathfrak{A}_r$ *совпадают с некоторым подполем* P *поля* K, *а при* $p = 3$

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{\textit{если} } r \text{ — \textit{короткий корень},} \\ Q, & \text{\textit{если} } r \text{ — \textit{длинный корень}} \end{cases}$$

[20]Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22. № 5. — С. 504-517.

[21]Дряева Р.Ю., Койбаев В.А., Нужин Я.Н. Полные и элементарные сети над полем частных кольца главных идеалов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 455. — С. 42-51.

[22]Зюбин С. А. Ковры аддитивных подгрупп над полем рациональных чисел // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского (г. Красноярск, 27 июля - 2 августа 2016 года). — С. 24-25.

для некоторых полей P и Q, удовлетворяющих следующим включениям

$$R \subseteq P, Q \subseteq K, \tag{5}$$

$$P^3 \subseteq Q \subseteq P. \tag{6}$$

Ранее при $p > 3$ утверждение теоремы установил В. М. Левчук[23] и в этом случае ковер $\mathfrak{A}$ параметризуется только одним полем. Теорема 3.1 снимает ограничение $p > 3$ для типа G_2. В **параграфе 3.1** приводятся примеры замкнутых ковров типа G_2, параметризуемых двумя различными несовершенными полями, большее из которых является алгебраическим расширением меньшего, в частности,

Пример 3.2. Пусть F — поле характеристики p и пусть t, u алгебраически независимы над F. Положим $P = F(t, u)$, $Q = F(t^3, u^3)$ и определим ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ типа G_2 следующим образом

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \; - \text{короткий корень}, \\ Q, & \text{если } r \; - \text{длинный корень}. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{A}$ является неприводимым замкнутым ковром. Более того, в работе Я.Н.Нужина и А.В.Степанова[24] доказано, что ковровые подгруппы, соответствующие таким коврам, допускают разложение Брюа и являются простыми группами.

Доказательство теоремы 3.1 приведено в **параграфе 3.2.** Теорема 3.1 получена автором лично. Результаты главы 3 опубликованы в работах [3], [4].

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Нужину Якову Нифантьевичу за неоценимую помощь и поддержку на всех этапах выполнения работы. Автор благодарен всему коллективу Кафедры алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики СФУ за внимание и бесценные советы по написанию диссертации.

[23] Левчук В. М. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22. № 5. — С. 504-517.

[24] Нужин Я. Н., Степанов А.В. Подгруппы групп Шевалле типов B_l и C_l, содержащие группу над подкольцом, и связанные с ними ковры // Алгебра и анализ. — 2019. — Т. 31. — № 4. — С. 198-224.

Работы автора по теме диссертации

Издания из перечня ВАК

[1] Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О замкнутости ковров лиева типа над коммутативными кольцами // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21. — № 3.—С. 192–196.

[2] Койбаев В.А., Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. Подгруппы групп Шевалле над локально конечным полем, определяемые набором аддитивных подгрупп // Математические заметки. — 2017. — Т. 102. — С. 857-865.

[3] Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2019. — Т. 27. — С. 80-86.

[4] Франчук С. К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 над полями характеристики $p > 0$ // Владикавказский математический журнал — 2020. — Т. 22. № 1.— С. 77-83.

Прочие работы автора по теме диссертации

[5] Куклина С.К., Лихачева А.О. Примеры незамкнутых ковров аддитивных подгрупп // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15-25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск: Сибирский федеральный университет. — 2014. — С. 76-78.

[6] Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. Примеры незамкнутых ковров // Алгебра и приложения: труды международной конференции по алгебре, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина. — Нальчик: издательство КБГУ. — 2014. — С. 54-57.

[7] Куклина С.К. О замкнутости ковров типа G_2 над коммутативными кольцами // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: проспект Свободный- 2015», посвященной 70-летию Великой Победы. Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.— С.11-12.

[8] Куклина С.К. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп типа G_2 // Сборник материалов международной кон-ференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный - 2016», посвященной Году образования в Содружестве Независимых Государств. «Математика, информатика: алгебра, математическая логика и дискретная математика». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016. — С. 32–33.

[9] Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О замкнутости ковров аддитивных подгрупп над локально конечным полем // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского (г. Красноярск, 27 июля - 2 августа 2016 года). — С. 36-37.

[10] Куклина С.К., Лихачева А.О., Нужин Я.Н. О неприводимых коврах аддитивных подгрупп над локально конечными полями // Мальцевские чтения: Международная конференция: Тезисы докладов (Новосибирск, 21–25 ноября 2016 года). — Новосибирск: Издательство Института математики. — 2016. — С. 93. — Режим доступа: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/16/malmeet16.pdf

[11] Kuklina S.K. On irreducible carpets of additive subgroups of type G_2 // Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвященную 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша — Москва: издательство МГУ — 2018. — С. 247-248.