На правах рукописи

Сорокина Марина Михайловна

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского»

Научный консультант:

д-р физ.-матем. наук, профессор **Ведерников Виктор Александрович**

Официальные оппоненты:

Васильев Александр Федорович, д-р физ.-матем. наук, профессор, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», кафедра алгебры и геометрии, профессор

Казарин Лев Сергеевич, д-р физ.-матем. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова», заведующий кафедрой алгебры и математической логики

Ревин Данила Олегович, д-р физ.-матем. наук, доцент, ФГБУН «Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», лаборатория теории групп, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация:

ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук», г. Екатеринбург

Защита состоится 02 марта 2018 года в 13.45 на заседании диссертационного совета Д.212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Р8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» http//www. sfu-kras.ru.

Автореферат разослан   января 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности. Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ – произвольный подкласс класса $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}_\pi$ – класс всех π-групп, содержащихся в $\mathfrak{F}$. Среди классов конечных групп центральное место занимают формации – классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формациями являются такие важные классы групп, как $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}, \mathfrak{A}$ – классы всех конечных разрешимых, сверхразрешимых, нильпотентных, абелевых групп соответственно, и многие другие, причем $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{N}$ являются насыщенными формациями. Формации явились эффективным средством для изучения подгруппового строения конечных групп (см. [15]), что обусловило интенсивное развитие теории формаций в последние десятилетия.

В теории классов конечных групп важную роль играют функциональные методы. Удобным инструментом для изучения формаций явились функции, в качестве области определения которых выступает множество $\mathbb{P}$ всех простых чисел (или, что равносильно, класс всех конечных простых абелевых групп). Так, понятие формации было введено Гашюцом в 1963 году в работе [27]. Там же с помощью функциональных методов Гашюцом были построены локальные формации и установлено, что в универсуме всех конечных разрешимых групп всякая локальная формация является насыщенной. Позднее (см. [23], теорема IV, 4.6) была доказана равносильность понятий локальной и насыщенной формаций в универсуме всех конечных групп.

С помощью локальных формаций были решены многие важные вопросы в теории конечных групп, в частности, с единых позиций изложены результаты о силовских, холловых, картеровых, гашюцевых подгруппах, о системных нормализаторах разрешимых групп, о группах Миллера-Морено, группах Шмидта и многие другие (см. [15]). Локальные формации нашли применение в исследовании вопросов дополняемости в группе ее нормальных подгрупп. В этом направлении хорошо известен следующий результат Гашюца.

Теорема 1 (Гашюц, [26]). *Пусть N – нормальная абелева подгруппа конечной группы G. Подгруппа N тогда и только тогда дополняема в группе G, когда N_p дополняема в G_p для любого $p \in \pi(N)$.*

Виландт в обзорном докладе на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году поставил следующую проблему (Виландт [41]):

(A) *Ослабить условие абелевости нормальной подгруппы N в Теореме* 1.

Одновременно Виландтом была отмечена невозможность исключить условие абелевости полностью (пример, подтверждающий данный факт, см. в [35], с. 131). Важный шаг в решении Проблемы **(A)** сделал Л.А. Шеметков, доказавший в 1974 году для локальной формации $\mathfrak{F}$ следующую теорему о дополняемости в конечной группе G ее $\mathfrak{F}$-корадикала N в случае, когда силовские подгруппы из N являются абелевыми.

Теорема 2 (Шеметков, [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – конечная группа. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

В качестве следствий из теоремы 2 вытекают, ставшие уже классическими, теорема Ф. Холла [32] о дополняемости в конечной разрешимой группе G её коммутанта G' ($\mathfrak{A}$-корадикала группы G) с абелевыми силовскими подгруппами, теорема Хупперта [34] о дополняемости в G нормальной подгруппы $O^p(G)$ ($\mathfrak{N}_p$-корадикала группы G) с абелевой силовской p-подгруппой.

Понятие $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы, введенное в рассмотрение Гашюцом в 1963 году [27], явилось естественным обобщением понятий холловой и картеровой подгрупп. В универсуме всех конечных разрешимых групп понятие $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы совпадает с понятием $\mathfrak{F}$-проектора, которое было введено Гашюцом позднее, в 1969 году (см. [28]). В работе [27] Гашюц объединил и расширил известные результаты Холла [29] и Картера [21], а именно, Гашюцом были установлены существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}$-проекторов) в разрешимой группе для насыщенной (локальной) формации $\mathfrak{F}$. В работе Шунка [38] теорема Гашюца была распространена для класса $\mathfrak{F}$, являющегося примитивно замкнутым гомоморфом. Шмид и Э.Ф. Шмигирев в [37] и [18] соответственно распространили результаты Гашюца [27] на произвольные группы с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, а Л.А. Шеметковым в [14] условие разрешимости $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ было ослаблено до $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимости. Дальнейшее обобщение результаты работ [14], [18], [27], [37], [38] получили в работе Эриксона [24] для примитивно замкнутого гомоморфа (класса Шунка), содержащегося в SQ-замкнутом универсуме. Фёрстер в [25] к исследованию вопросов существования и сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов в группах для класса Шунка $\mathfrak{F}$, содержащегося в SQE_Φ-замкнутом универсуме, применил подход, основанный на использовании Q-границы класса Шунка (см. также [23], главы III и VI). В ряде работ были установлены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathfrak{F}$-подгруппа является $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой ($\mathfrak{F}$-проектором) группы G или содержится в её $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$-проекторе), в частности, выявлены условия при которых $\mathfrak{F}$-проектор группы является её $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппой (см. [22], [33]).

В книге [23] Дерк и Хоукс поставили следующую общую проблему (Дерк, Хоукс [23], глава III, § 3, проблема B):

(B) *Может ли универсум, для которого работает теория проекторов, расширен за пределы класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп*?

К этому направлению относятся упомянутые выше результаты Шмида, Э.Ф.

Шмигирева, Л.А. Шеметкова, Эриксона, Фёрстера.

Ф. Холл в работах [30], [31] ввел понятия силовской системы и системного нормализатора с целью более глубокого изучения разрешимых групп. Картер и Хоукс в работе [22] для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ в разрешимой группе G выделили сопряженный класс $\mathfrak{F}$-подгрупп, получивших в [22] название $\mathfrak{F}$-нормализаторов, причем класс $\mathfrak{F}$-нормализаторов совпадает с сопряженным классом системных нормализаторов в G, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп. В работе [22] установлено, что для $\mathfrak{F}$-нормализаторов в разрешимой группе G выполняются многие свойства системных нормализаторов в G, а именно, в [22] доказано, что в разрешимой группе G для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-нормализаторы, любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены в G, $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G (см. также [23], глава V). Кроме того, в [22] для $\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G была получена его характеризация посредством цепи максимальных подгрупп, соединяющих H с G. Это свойство $\mathfrak{F}$-нормализатора H разрешимой группы G послужило отправной точкой для определения $\mathfrak{F}$-нормализатора H для класса Шунка в работе Манна [36] и в произвольной группе для локальной формации $\mathfrak{F}$ в работе Л.А. Шеметкова [14]. Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора (системного нормализатора) разрешимой группы G оказалось тесно связанным с понятиями $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы и подгруппы Картера группы G (см. [20], [22], [23], [27]). Так, в [22] установлено, что любой $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе из G. $\mathfrak{F}$-нормализаторы также нашли применение в исследовании вопросов дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов в группах. В [22] доказано, что всякое дополнение к абелевому $\mathfrak{F}$-корадикалу разрешимой группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором в G, где $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Для произвольной группы G аналогичный результат получил Л.А. Шеметков в [15].

В связи с классификацией конечных простых групп актуальной в теории конечных групп стала задача исследования непростых конечных групп с произвольными, необязательно абелевыми, композиционными факторами. Наиболее удобными для решения этой задачи явились композиционные формации, введенные в рассмотрение Л.А. Шеметковым в 1974 году с помощью функций вида $f : \mathfrak{I} \to \{$формации конечных групп$\}$, где $\mathfrak{I}$ – класс всех конечных простых групп [13]. Независимо от Л.А. Шеметкова композиционные формации были построены Бэром в терминах разрешимо насыщенных формаций (см. [23]). Композиционные формации также нашли широкое применение в теории конечных групп, в частности, при изучении субнормальных подгрупп и их обобщений (см. [2]).

Тот факт, что теория формаций оказалась достаточно удобным средством для решения многих вопросов теории конечных групп, привел к необходимости более тщательного изучения самих формаций. В 1984 году Л.А. Шеметков для непустого подмножества ω множества $\mathbb{P}$ построил ω-локальные формации [17], раскрыв новые возможности использования функций при изучении классов конечных групп. В работе [11] А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков доказали равносильность понятий ω-локальной и ω-насыщенной формаций. Актуальность проблемы применения ω-локальных формаций к изучению подгруппового строения конечных групп в разные годы неоднократно обсуждалась на Гомельском Алгебраическом Семинаре. В 1999 году А.Н. Скиба и Л.А. Шеметков в качестве обобщения понятия композиционной формации построили Ω-композиционные формации, где Ω – непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ (см. [12]).

Как отмечено в монографии А.Н. Скибы [10], важной характеристикой формации является наличие в ней тех или иных подформаций и их взаимное расположение (см. [10], с. 9). Поскольку понятие формации явилось естественным обобщением понятия многообразия, то многие методы в теории формаций возникли как аналоги соответствующих методов теории многообразий. В частности, исследования подформационного строения локальных формаций привели к необходимости разработки особых методов, связанных с понятием критической формации. В 1978 году Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп впервые была поставлена следующая общая проблема (Л.А. Шеметков [16]):

(С) *Изучить $\mathfrak{H}_\theta$-критические формации, где $\mathfrak{H}$ – класс групп, θ – некоторая совокупность формаций.*

В серии работ (см. [7] – [9]) А.Н. Скиба получил решение Проблемы **(С)** в случае, когда θ – совокупность всех локальных формаций. А.Н. Скибой и В.М. Селькиным изучены критические нормально наследственные и наследственные локальные формации (см., например, [6]). Важным обобщением понятия локальности является понятие кратной локальности, введенное в рассмотрение А.Н. Скибой в 1987 году [8]. В работе [5] В.Г. Сафонов получил описание строения критических n-кратно локальных формаций. Исследованием критических ω-локальных формаций занимались А.Н. Скиба, В.М. Селькин, И.Н. Сафонова и др. В работе [42] изучены критические композиционные формации. В последние годы нередко в качестве аппарата исследования формаций стали использоваться подгрупповые функторы, т.е. согласованные с изоморфизмами групп функции, выделяющие некоторые системы подгрупп (см. [2], [10]). В монографии [10] представлены основные результаты о критических τ-замкнутых n-кратно локальных формациях, где τ – регулярный подгрупповой функтор (подгрупповой функтор Скибы).

В 1999 году В.А. Ведерников предложил принципиально новый функциональный подход к изучению классов групп, который привел к необходимости рассмотрения для формаций наряду с функциями-спутниками новой функции – направления, определяемой как отображение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел (класса $\mathfrak{I}$ всех простых конечных групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга ([68], [69]). Таких направлений существует бесконечное множество, а направление ω-локальной формации (Ω-композиционной формации) является одним из них. Поэтому для фиксированного непустого множества ω простых чисел (для фиксированного непустого класса Ω простых конечных групп) можно построить бесконечное множество новых видов формаций – ω-веерных формаций (Ω-расслоенных формаций). В.А. Ведерниковым в 1999 году была поставлена следующая задача (В.А. Ведерников [68], [69]):

(D) *Разработать теории ω-веерных* (задача (D1)) *и Ω-расслоенных* (задача (D2)) *формаций конечных групп.*

Ввиду отмеченной выше связи между $\mathfrak{F}$-проекторами, $\mathfrak{F}$-покрывающими подгруппами и $\mathfrak{F}$-нормализаторами в конечных группах для локальной формации $\mathfrak{F}$ при решении Проблемы **(B)** с помощью ω-локальных формаций актуальной является следующая задача:

(E) *Разработать теорию $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация.*

Цели диссертационного исследования.
В диссертации ставится целью решение проблем и задач **(A)** – **(E)**.

Основные результаты диссертации.

1. Решена Проблема **(A)** (проблема Виландта [41]) о дополняемости в конечной группе G $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

2. Решена Проблема **(B)** (проблема Дерка и Хоукса [23]) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп.

3. Решена Проблема **(C)** (проблема Л.А. Шеметкова [16]) изучения $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций для n-кратно ω-веерных, τ-замкнутых ω-веерных, τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций.

4. Разработаны основные положения теории ω-веерных и теории Ω-расслоенных формаций (решение Задачи **(D)** В.А. Ведерникова).

5. Разработаны основные положения теории $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация (решение Задачи **(E)**).

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Методология и методы исследования. В диссертации используются классические методы теории групп, а также методы теории классов групп и теории подгрупповых функторов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по теории конечных групп и теории классов конечных групп, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации. Список публикаций по теме диссертации включает 29 работ [42] – [70], в том числе 26 статей [42] – [67] опубликованы в рецензируемых изданиях. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 статьях [42] – [57] в изданиях из перечня ВАК.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации апробировались:

– на научно-исследовательском семинаре кафедры Высшей алгебры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (2017 г., Москва);

– на семинаре «Алгебра и логика» Института математики имени С.Л. Соболева СО РАН (2017 г., Новосибирск);

– на Красноярском алгебраическом семинаре (2017 г., Красноярск);

– на научно-исследовательском семинаре отдела алгебры и топологии Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН (2016 г., Екатеринбург);

– на Международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения» (2016 г., Красноярск) – пленарный доклад;

– на Международной конференции "Groups and Graphs, Metrics and Menifolds"(2017 г., Екатеринбург);

– на семинарах кафедры алгебры и геометрии Брянского государственного университета имени И.Г. Петровского (2014 – 2017 гг., Брянск).

Результаты диссертации были представлены на международных алгебраических конференциях в Москве (2003, 2008), Санкт-Петербурге (2002), Екатеринбурге (2001, 2015), Красноярске (2002, 2007, 2010, 2013, 2016), Гомеле (2000, 2005, 2007), Киеве (2002), Владикавказе (2012, 2015), Казани (2016), Нальчике (2017).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, перечня условных обозначений и определений, списка литературы (132 наименования), составленного в алфавитном порядке. Объем диссертации – 229 страниц.

Основное содержание работы

Глава 1 посвящена разработке теории ω-веерных формаций конечных групп (Задача **(D1)**) и ее применению к изучению вопросов дополняемости корадикалов в группах. Целью данной главы является также решение Проблемы **(A)** для случая локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

В § 1.1 решается Задача **(D1)**. Пусть $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$, $g : \mathbb{P} \to \{$формации групп$\}$, $\delta : \mathbb{P} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ – функции, называемые соответственно ωF-функцией, $\mathbb{P}F$-функцией и $\mathbb{P}FR$-функцией. Формацию $\omega F(f, \delta) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\ )$ называем *ω-веерной формацией с направлением δ и ω-спутником f*. Формацию $\mathbb{P}F(g, \delta) = (\ G \in \mathfrak{E} \mid G/G_{\delta(p)} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G)\ )$ называем *веерной формацией с направлением δ и спутником g*. Рассматривая в качестве δ различные $\mathbb{P}FR$-фунции, получаем различные виды ω-веерных (веерных) формаций. Одним из важных видов ω-веерных формаций являются ω-полные формации. *ω-Полной* называем формацию $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta_0)$, где $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Значение ω-полных формаций в теории формаций конечных групп отражено в теореме 1.1.1.

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является ω-полной формацией.*

Связь между ω-веерными и веерными формациями устанавливает

Теорема 1.1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ и ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ и спутником f_1 таким,что $f_1(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $f_1(p) = \emptyset$ для всех $p \in \mathbb{P} \setminus \omega$.*

Одним из видов ω-веерных формаций являются хорошо известные ω-локальные формации. В.А. Ведерников в работе [1] ввел в рассмотрение два важных вида ω-веерных формаций – ω-специальные и ω-центральные формации. Для направлений δ_0, δ_1, δ_2, δ_3 соответственно ω-полной, ω-локальной, ω-специальной и ω-центральной формаций справедливо соотношение: $\delta_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$. Среди направлений δ ω-веерной формации таких, что $\delta_0 \leq \delta$, важное место занимают p-направления, т.е. направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{E}_{p'} \cdot \delta\ (p) = \delta\ (p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. В.А. Ведерников в [1] для ω-веерной формации ввел в рассмотрение понятия a-направления, b-направления, b_p-направления, где $p \in \mathbb{P}$, r-направления и s-направления. Для ω-веерных формаций с p-направлением получена следующая теорема.

Теорема 1.1.4. *Пусть δ – p-направление ω-веерной формации. Если $\mathfrak{F}$ – веерная формация с направлением δ, то $\mathfrak{F}$ является ω-веерной формацией с направлением δ для любого непустого множества простых чисел ω.*

При исследовании ω-веерных формаций удобно использовать их ω-спутники. В § 1.1 рассматриваются некоторые важные виды ω-спутников ω-веерной формации. В теореме 1.1.6 установлено существование единственного минимального ω-спутника ω-веерной формации с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta_0 \le \delta$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального ω-спутника ω-веерной формации, получен ряд результатов об ω-веерных формациях.

Теорема 1.1.7. *Пусть δ – ps-направление ω-веерной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является ω-веерной с направлением δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является $\{q\}$-веерной формацией с направлением δ для любого $q \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$.*

Параграфы 1.2 – 1.4 посвящены применению ω-веерных формаций с направлением δ_1 (ω-локальных формаций) к исследованию дополняемости корадикалов в группах. В § 1.2 введены в рассмотрение понятия f_ω-центрального и f_ω-эксцентрального главных факторов групп, свойства которых в § 1.3 и § 1.4 применяются к исследованию указанных выше вопросов. Пусть f – ωF-функция. Главный ωd-фактор A/B группы G называем *f_ω-центральным* в G, если $G/C_G(A/B) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$; *$f_\omega$-эксцентральным* в G, если $G/C_G(A/B) \notin f(p)$ для некоторого $p \in \omega \cap \pi(A/B)$. В теореме 1.2.1 для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$-корадикал группы G не содержит определенных G-главных f_ω-центральных факторов.

Теорема 1.2.1. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega LF(f)$ – ω-локальная формация Фиттинга с максимальным внутренним ω-спутником f и $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если для некоторого простого числа $p \in \omega$ силовская p-подгруппа группы $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевой для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $G^{\mathfrak{F}} = A_1^{\mathfrak{F}} A_2^{\mathfrak{F}} \cdots A_n^{\mathfrak{F}}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных f_ω-центральных pd-факторов.*

В § 1.3 изучаются вопросы применения ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ к доказательству существования ω-дополнений и дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. В теоремах 1.3.1 – 1.3.3 получены результаты, подобные (не равносильные) результатам Л.А. Шеметкова из [39] (см. [39], теоремы 4, 5, следствие теоремы 5). В теореме 1.3.4 установлены условия, при которых $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ в любом расширении группы G обладает ω-дополнением, нормализующим некоторую силовскую подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$.

Теорема 1.3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, Γ – расширение группы G, ω_1 – множество всех тех простых чисел $q \in \omega$, для которых силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ является циклической. Если $\omega_1 \ne \emptyset$, то в Γ существует ω_1-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p – наименьшее число из ω_1.*

Из теоремы 1.3.4 следует результат Л.А. Шеметкова из [15] (см. [15], теорема 11.10).

В § 1.4 получено решение Проблемы **(A)**. С этой целью здесь введено определение $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы G. Следуя [15] (см. [15], определение 21.1), подгруппу H группы G называем *$\omega\mathfrak{F}$-нормализатором* группы G, если $H/\Phi(H) \cap O_{\omega'}(H) \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. В теореме 1.4.2 установлены достаточные условия ω-дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторами.

Теорема 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является ω-разрешимым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, то каждый $\omega\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является ω-дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

В качестве следствий из теоремы 1.4.2 получен ряд результатов о дополняемости в конечной группе её $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп, тем самым для локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ получено решение Проблемы **(A)**.

Следствие 1.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является абелевым для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением в G к её $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 1.4.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация Фиттинга, содержащая все нильпотентные группы, и группа $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является разрешимым с абелевыми силовскими подгруппами для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Основные теоремы 1.1.1, 1.1.3, 1.1.4, 1.1.6, 1.1.7, 1.2.1, 1.3.1 – 1.3.4, 1.4.2 главы 1 опубликованы в совместных работах [44], [55] (соавтор В.А. Ведерников) в неразделимом соавторстве. Другие свойства ω-веерных формаций и их ω-спутников, представленные в главе, опубликованы в работах [60], [67], совместных с дипломниками М.В. Котляровой и Р.А. Макухиным соответственно; им принадлежат доказательства следствий теорем в [60] и [67].

Глава 2 посвящена применению ω-веерных формаций к изучению классических $\mathfrak{F}$-подгрупп в группах. В § 2.1 – § 2.3 получено решение Проблемы **(B)**: построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой ω-примитивно замкнутый гомоморф, содержащий неразрешимые группы, и, в частности, ω-локальная формация, содержащая неразрешимые группы. С этой целью в § 2.1 изучаются ω-примитивно замкнутые классы групп и ω-примитивные группы. Здесь получены предварительные результаты, используемые при доказательстве утверждений § 2.2 и § 2.3.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – непустые классы групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называем *ω-насыщенным в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ называем *ω-примитивно замкнутым в $\mathfrak{X}$* или, коротко, *ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/Core_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует, что $G \in \mathfrak{F}$. ωP-замкнутый в $\mathfrak{X}$ гомоморф коротко будем называть *ωP-гомоморфом в $\mathfrak{X}$*. В леммах 2.1.1 – 2.1.3 получены свойства ωP-замкнутых классов групп.

В § 2.1 также введено в рассмотрение определение ω-примитивной группы. Группу G называем *ω-примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $Core_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M называем *ω-примитиватором* группы G. Центральным результатом об ω-примитивных группах является следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть G – ω-примитивная группа, M – ее ω-примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

1) группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = N \times Core_G(M)$ и $G = [N]M$;

2) группа G содержит единственную минимальную нормальную ω-подгруппу N, $C_G(N) = Core_G(M)$ и $G = NM$;

3) группа G содержит точно две минимальные нормальные ω-подгруппы N_1 и N_2, причем $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$, $C_G(N_i) = N_{3-i} \times Core_G(M)$, $i = 1, 2$.

В качестве следствия из теоремы 2.1.1 получается известный результат Бэра о примитивных группах из [19].

В § 2.2 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^\omega$-проектора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппу H группы G называем *$\mathfrak{F}^\omega$-проектором в G*, если для любой нормальной ω-подгруппы N группы G подгруппа HN/N является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G/N. Если $\omega = \pi(G)$, то $\mathfrak{F}^\omega$-проектор группы G становится $\mathfrak{F}$-проектором в G [28]. В теоремах 2.2.1 и 2.2.2 установлены соответственно достаточное и необходимое условия существования в группе G $\mathfrak{F}^\omega$-проекторов для непустого ωP-замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Если G обладает $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой, то в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор.*

Теорема 2.2.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф и $\mathfrak{F}$ – непустой подкласс класса $\mathfrak{X}$. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ с $O_{\omega}(G) \neq 1$ обладает $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором, то справедливы следующие утверждения*:

1) *класс $\mathfrak{F}$ является ωP-замкнутым в $\mathfrak{X}$*;

2) *если $H \in \mathfrak{F}$ и N – нормальная ω-подгруппа группы H, то $H/N \in \mathfrak{F}$.*

Из теорем 2.2.1 и 2.2.2 следует результат Эриксона [24].

В § 2.3 изучаются $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы конечных групп и их взаимосвязь с $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторами. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Подгруппу H группы G называем *$\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leq U \leq G$, V – нормальная ω-подгруппа группы U и $U/V \in \mathfrak{F}$ следует, что $U = HV$. При $\omega = \pi(G)$ из определения $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы получаем определение $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппы [27]. В теореме 2.3.1 для группы G с абелевой минимальной нормальной ω-подгруппой A установлена взаимосвязь между множествами $Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$, $Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G)$ и $Comp_G(A)$ соответственно всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов группы G, всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп группы G и всех дополнений к подгруппе A в G.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$, A – абелева минимальная нормальная ω-подгруппа группы G, $G/A \in \mathfrak{F}$. Тогда $Proj_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Cov_{\mathfrak{F}^{\omega}}(G) = Comp_G(A)$.*

В теореме 2.3.2 исследуется вопрос включения $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G в ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающую подгруппу.

Теорема 2.3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, N – нильпотентная нормальная ω-подгруппа группы G. Если H – $\mathfrak{F}$-подгруппа в G такая, что $G = HN$, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппе группы G. В частности, если H – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы G такая, что $G = HN$, то H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

В теореме 2.3.4 для непустого ωP-замкнутого в $\mathfrak{X}$ гомоморфа $\mathfrak{F}$ установлена взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторами и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими подгруппами.

Теорема 2.3.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф, $\mathfrak{F}$ – непустой ωP-гомоморф в $\mathfrak{X}$, G – $\mathfrak{X}$-группа, обладающая $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой $\mathfrak{F}$-корадикальной нормальной ω-подгруппой. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектором в G тогда и только тогда, когда H – $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающая подгруппа в G.*

В теореме 2.3.5 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование и сопряженность $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп ($\mathfrak{F}^{\omega}$-проекторов) в группе с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, являющимся ω-группой.

Теорема 2.3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой ω-группой. Тогда группа G имеет по крайней мере одну $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающую подгруппу (один $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектор) и любые две $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающие подгруппы (два $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора) из G сопряжены в G.*

В теореме 2.3.6 изучается взаимосвязь между $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающими и $\mathfrak{F}$-абнормальными подгруппами в группах.

Теорема 2.3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, G – группа, $G^{\mathfrak{F}}$ – ω-группа и $H < G$. Подгруппа H группы G является $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей в G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H – $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа в G.*

В теореме 2.3.7 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ установлено существование $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы в определенной подгруппе группы G.

Следствиями теоремы 2.3.2 являются результаты Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.9(1)), Гашюца (см. [23], лемма III, 3.14), Эриксона [24]. Из теоремы 2.3.4 при $\omega = \pi(G)$ непосредственно получается теорема Эриксона [24]. Следствиями теоремы 2.3.5 являются результаты Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.7), Э.Ф. Шмигирева [18], Шмида [37] (см. [15], теорема 15.6). Следствием теоремы 2.3.6 является теорема Л.А. Шеметкова ([15], теорема 15.1). В качестве следствия из теоремы 2.3.7 получается результат Картера и Хоукса ([22], теорема 5.12).

В § 2.4 – § 2.6 решена Задача **(E)**. § 2.4 посвящен изучению $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-критических подгрупп конечных групп. Результаты, представленные здесь, используются при доказательстве основных утверждений § 2.5 и § 2.6. Следуя [15], нормальную подгруппу R группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$-*предельной* нормальной подгруппой в G, если $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ является главным фактором группы G. Максимальную подгруппу M группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$-*критической* в G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельной нормальной подгруппы R из G. В леммах 2.4.1 – 2.4.4 получены свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельных и $\mathfrak{F}^{\omega}$-критических подгрупп.

В § 2.5 вводится в рассмотрение понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора конечной группы и изучаются его основные свойства. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – группа. $\mathfrak{F}$-подгруппу H группы G называем $\mathfrak{F}^{\omega}$-*нормализатором* в G, если существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geq 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. В следующих теоремах представлены свойства $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов групп.

Теорема 2.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, G – группа с $\mathfrak{F}$-корадикалом $G^{\mathfrak{F}}$, являющимся ω-группой. Тогда в G существует $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатор H и $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Теорема 2.5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G является π-разрешимой ω-группой. Тогда любые* *два $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатора группы G сопряжены в G.*

Теорема 2.5.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация с внутренним ω-спутником f, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, H – $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G. Тогда H покрывает каждый f_ω-центральный и изолирует каждый f_ω-эксцентральный главный ωd-фактор группы G, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *$G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая группа;*

2) *$G^{\mathfrak{F}}$ – ω-разрешимая группа.*

При $\omega = \pi(G)$ из теоремы 2.5.2 непосредственно получаются результаты Л.А. Шеметкова ([14]; см. также [15], теорема 21.4), Картера и Хоукса ([22]; см. также [23], теорема V, 3.2). Следствиями теоремы 2.5.3 являются результаты Л.А. Шеметкова ([14]; см. также [15], следствие 21.1.1), Картера и Хоукса ([22]; см. также [23], теорема V, 3.2).

В теореме 2.5.5 для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$ установлены достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторами, тем самым получено решение Проблемы **(A)**.

Теорема 2.5.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация Фиттинга, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $G = A_1A_2\cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно перестановочные субнормальные подгруппы группы G. Если $\mathfrak{F}$-корадикал $A_i^{\mathfrak{F}}$ является π-разрешимой ω-группой, а его силовские p-подгруппы абелевы для любого $p \in \omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G является дополнением к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в G.*

Отметим, что теоремы 1.4.2, 2.5.5 являются развитием основных результатов работ С.Ф. Каморникова [3] и С.Ф. Каморникова, О.Л. Шеметковой [4].

В § 2.6 для ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ получен ряд результатов о взаимосвязи $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов с $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающими подгруппами в группах. В теореме 2.6.1 представлен центральный результат данного параграфа.

Теорема 2.6.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G – группа и $G^{\mathfrak{F}}$ – π-разрешимая ω-группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа группы G содержит, по крайней мере, один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G;*

2) *всякая $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающая подгруппа группы G содержит, по крайней мере, один $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G;*

3) *каждый $\mathfrak{F}^\omega$-нормализатор группы G содержится, по крайней мере, в одной $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающей подгруппе группы G.*

В теореме 2.6.2 установлено, при каких условиях множество $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов группы совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающих подгрупп.

Теорема 2.6.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – ω-локальная формация, $G^{\mathfrak{F}}$ – нильпотентная ω-подгруппа группы G. Тогда множество всех $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов груп-*

пы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающих подгрупп.

В теореме 2.6.3 для ω-локальных формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ получен результат, характеризующий влияние совпадения множества всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-покрывающих подгрупп группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-покрывающих подгрупп на совпадение множества всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-нормализаторов группы G со множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-нормализаторов.

Отметим, что из теоремы 2.6.1 следует результат Л.А. Шеметкова ([15], теорема 21.8). В качестве следствий из теоремы 2.6.2 получаются результаты Л.А. Шеметкова ([14], см. также [15], следствие 21.5.2) и Картера и Хоукса ([22], теорема 5.6).

Основные теоремы 2.1.1, 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 – 2.3.7, 2.5.1 – 2.5.3, 2.5.5, 2.6.1 – 2.6.3 главы 2 опубликованы в совместных работах [56], [57] (соавтор В.А. Ведерников). Все перечисленные теоремы принадлежат диссертанту, при этом идеи и методы доказательств обсуждались и согласовывались с В.А. Ведерниковым.

Глава 3 посвящена применению ω-веерных формаций к изучению подформационного строения формаций конечных групп в рамках исследования $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций. В данной главе решена Проблема **(C)** для n-кратно ω-веерных и τ-замкнутых ω-веерных формаций.

Формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{\theta}$-*критической* формацией (или, иначе, минимальной не $\mathfrak{H}$ θ-формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подформации из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся, где $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, θ – совокупность формаций, $\mathfrak{F} \in \theta$ (см., например, [7], [16]). $\mathfrak{H}_{\theta}$-критическую формацию в случае, когда θ – совокупность всех n-кратно ω-веерных формаций с направлением δ, называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-*критической* формацией. В случае, когда $n = 1$, $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критическую формацию называем $\mathfrak{H}_{\omega\delta}$-*критической* формацией. В § 3.1 и § 3.2 изучаются n-кратно ω-веерные формации. В теоремах 3.1.1 и 3.1.2 решается Проблема **(C)** для n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением.

Теорема 3.1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической, то $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$, где G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической для некоторого $p \in \pi(P)$, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией.*

Теорема 3.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta \leq \delta_3$, $\mathfrak{H}$ – n-кратно ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \omega F_n(G, \delta)$ – формация с минимальным $\omega\delta_{(n-1)}$-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \cap \omega \neq \varnothing$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и фор-*

мация $f(p)$ является $h(p)_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической, а если $\pi(P)\cap\omega=\varnothing$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{\omega\delta_{(n-1)}}$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega\delta_n}$-критической.

Всякое br-направление ω-веерной формации является bp-направлением, обратное неверно. Поэтому в § 3.1 отдельно рассмотрены критические n-кратно ω-веерные формации с br-направлением $\delta\leq\delta_3$. В § 3.2 изучены критические n-кратно ω-веерные формации в случае, когда $n=1$.

Все основные результаты параграфов 3.1 и 3.2 опубликованы в совместных работах [47], [48] (соавтор М.А. Корпачева). Основные теоремы 3.1.1, 3.1.2 главы 3 принадлежат М.М. Сорокиной. В [42], [59], [70] исследовались различные виды критических ω-веерных и веерных формаций.

В § 3.3 и § 3.4 изучаются τ-замкнутые ω-веерные формации, где τ – подгрупповой функтор, т.е. отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, удовлетворяющее условию $(\tau(G))^{\alpha}=\tau(G^{\alpha})$ для любого изоморфизма α каждой группы G (см., например, [2]). Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой*, если $\tau(G)\subseteq\mathfrak{F}$ для любой группы $G\in\mathfrak{F}$ [10]; ω-спутник ω-веерной формации называем *τ-замкнутым*, если все его значения являются τ-замкнутыми формациями. В теоремах 3.4.1 и 3.4.2 решается Проблема **(C)** для τ-замкнутых ω-веерных формаций с bp-направлением.

Теорема 3.4.1. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta\leq\delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и минимальным τ-замкнутым ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической, то $\mathfrak{F}=\tau\omega F(G,\delta)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P)\subseteq\omega$, то $\Phi(G)=1$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической для некоторого $p\in\pi(P)$, а если $\pi(P)\nsubseteq\omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической формацией.*

Теорема 3.4.2. *Пусть δ – bp-направление ω-веерной формации, $\delta\leq\delta_3$, τ – регулярный δ-радикальный подгрупповой функтор, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая ω-веерная формация с направлением δ и максимальным внутренним ω-спутником h, $\mathfrak{F}=\tau\omega F(G,\delta)$ – формация с минимальным τ-замкнутым ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, причем, если $\pi(P)\cap\omega\neq\varnothing$, то $\Phi(G)=1$, $\pi(P)=\{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_\tau$-критической, а если $\pi(P)\cap\omega=\varnothing$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_\tau$-критической формацией. Тогда формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\omega\delta}$-критической.*

Из теорем 3.4.1 и 3.4.2 непосредственно вытекают результаты для критических τ-замкнутых ω-локальных, ω-специальных и ω-центральных формаций.

Все основные результаты параграфов 3.3 и 3.4 опубликованы в работах [49] (соавтор М.А. Корпачева) и [54]. Основные теоремы 3.4.1, 3.4.2 главы 3 принадлежат М.М. Сорокиной. В [65], [66] исследовались различные виды критических τ-замкнутых ω-веерных формаций. Применение методов теории подгрупповых функторов к исследованию τ-замкнутых формаций изучалось в [53], [63].

Глава 4 диссертации посвящена разработке теории Ω-расслоенных формаций конечных групп (Задача **(D2)**) и ее применению к изучению подформационного строения формаций. Целью главы является также решение Проблемы **(C)** для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций.

В § 4.1 разработаны основные положения теории Ω-расслоенных формаций конечных групп. Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$, $g : \mathfrak{I} \to \{$формации групп$\}$, $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ – ΩF-функция, F-функция и FR-функция соответственно. Функции f, g и φ принимают одинаковые значения на изоморфных группах из области определения. Формацию $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap K(G))$ называем *Ω-расслоенной формацией с направлением φ и Ω-спутником f*. Формацию $F(g, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} | G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in K(G))$ называем *расслоенной формацией с направлением φ и спутником g*. Одним из важных видов Ω-расслоенных формаций являются Ω-свободные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi_0)$ называем Ω-*свободной* формацией, где $\varphi_0(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. Роль Ω-свободных формаций раскрывается в теореме 4.1.1.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая нееданичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией.*

Связь между Ω-расслоенными и расслоенными формациями устанавливает

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая неединичная формация и $\Omega = K(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и Ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $f_1(A) = \emptyset$ для всех $A \in \mathfrak{I} \setminus \Omega$.*

Одним из видов Ω-расслоенных формаций являются хорошо известные Ω-композиционные формации. Формацию $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi_2')$ называем Ω-*канонической* формацией, где $\varphi_2'(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \mathfrak{E}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. В.А. Ведерников в [40] ввел в рассмотрение Ω-биканонические формации. Для направлений φ_0, φ_2, φ_3 соответственно Ω-свободной, Ω-биканонической и Ω-композиционной формаций справедливо соотношение $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$. Направление φ Ω-расслоенной формации называем *правильным* или, коротко, *r-направлением*, если $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'} \cdot \varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{I}$. В.А. Ведерниковым в [40] введены в рассмотрение такие виды направлений Ω-расслоенной формации, как a-направление, b-направление, b_A-направлением, где $A \in \mathfrak{I}$, n-направление. Для Ω-расслоенных формаций с r-направлением справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1.3. *Пусть φ – r-направление Ω-расслоенной формации. Если $\mathfrak{F}$ – расслоенная формация с направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

В данном параграфе рассматриваются некоторые важные виды Ω-спутников Ω-расслоенной формации. В теореме 4.1.5 установлено существование единственного минимального Ω-спутника Ω-расслоенной формации с направлением φ, удовлетворяющим условию $\varphi_0 \leq \varphi$, а также получено описание его строения. Используя описание строения минимального Ω-спутника Ω-расслоенной формации, получены свойства Ω-расслоенных формаций.

Теорема 4.1.6. *Пусть φ – nr-направление Ω-расслоенной формации. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является (Z_p)-расслоенной формацией с направлением φ для любого $Z_p \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$.*

В теореме 4.1.7 получено описание строения максимального полувнутреннего Ω-спутника Ω-расслоенной формации с $b_A r$-направлением, где $A \in \Omega$.

Теорема 4.1.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ – Ω-расслоенная формация с $b_A r$-направлением φ, где $A \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным полувнутренним Ω-спутником f, удовлетворяющим условию: если $f(A) \neq \mathfrak{E}$, то $f(A) = \mathfrak{E}_A h(A)$, где h – произвольный полувнутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$.*

Основные теоремы 4.1.1 – 4.1.3, 4.1.5, 4.1.6 главы 4 опубликованы в совместной работе [43] (соавтор В.А. Ведерников) в неразделимом соавторстве; теорема 4.1.7 опубликована автором в [52].

В § 4.2 изучаются максимальные подформации Ω-расслоенных формаций, а именно, устанавливаются условия, при которых однопорожденная Ω-расслоенная формация имеет единственную максимальную Ω-расслоенную подформацию. Одним из центральных результатов здесь является следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации такое, что $\varphi \leq \varphi_3$, $G = [P]H$ – монолитическая группа с монолитом P, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $Z_p \in \Omega$, H – f-базисная группа и $\mathfrak{M}$ – максимальная подформация из $formH$. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega F(G, \varphi)$ обладает единственной максимальной Ω-расслоенной подформацией с направлением φ и Ω-спутником h, имеющим следующее строение: $h(\Omega') = form(G/O_\Omega(G))$, $h(Z_p) = \mathfrak{M}$, $h(A) = form(G/G_{\varphi(A)})$ для всех $A \in (\Omega \cap K(G)) \setminus (Z_p)$, $h(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(G)$.*

Все основные результаты параграфа 4.2 опубликованы в совместной работе [46] (соавтор М.А. Корпачева). Теорема 4.2.1 принадлежит М.М. Сорокиной.

В § 4.3 и § 4.4 изучаются τ-замкнутые Ω-расслоенные формации, где τ – подгрупповой функтор. В § 4.3 представлены свойства τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций. Одним из центральных результатов здесь является теорема 4.3.1, устанавливающая взаимосвязь между τ-замкнутостью Ω-расслоенной формации и τ-замкнутостью ее Ω-спутника. Все основные результаты параграфа 4.3 опубликованы в [51], [64]. Теорема 4.3.1 принадлежат диссертанту.

В § 4.4 изучаются критические τ-замкнутые Ω-расслоенные формации. В теоремах 4.4.1 и 4.4.2 решается Проблема **(C)** для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций с br-направлением.

Теорема 4.4.1. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω-спутником h, $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f. Если формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критической, то $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G, \varphi)$, где G – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \nsubseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией.*

Теорема 4.4.2. *Пусть φ – br-направление Ω-расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, τ – регулярный $\Omega\varphi$-радикальный подгрупповой функтор, замкнутый относительно композиционных факторов, $\mathfrak{H}$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с направлением φ и максимальным внутренним Ω-спутником h, $\mathfrak{F} = \tau\Omega F(G, \varphi)$ – τ-замкнутая Ω-расслоенная формация с минимальным τ-замкнутым Ω-спутником f, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $K(P) \subseteq \Omega$, то $\Phi(G) = 1$ и формация $f(A)$ является $h(A)_\tau$-критической для $A \in K(P)$, а если $K(P) \nsubseteq \Omega$, то $f(\Omega')$ является $h(\Omega')_\tau$-критической формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\tau\Omega\varphi}$-критической формацией.*

Все основные результаты параграфа 4.4 опубликованы в совместной работе [51] (соавтор М.А. Корпачева). Основные теоремы 4.4.1, 4.4.2 главы 4 принадлежат М.М. Сорокиной. Первыми работами автора о критических Ω-расслоенных формациях являются работы [45], [58], опубликованные совместно с Н.В. Силенок. Позднее в серии работ (см., например, [46], [50]) автором совместно с М.А. Корпачевой исследовались критические Ω-расслоенные формации конечных групп различных направлений, а также критические Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп. Исследованию τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций посвящены работы [61], [62].

Заключение

Выводы. В диссертации решены следующие задачи:

1. Решена (совместно с В.А. Ведерниковым) Проблема **(A)** (проблема Виландта [41]) о дополняемости в конечной группе $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

2. Решена Проблема **(B)** (проблема Дерка и Хоукса [23]) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп.

3. Решена Проблема **(C)** (проблема Л.А. Шеметкова [16]) изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций для n-кратно ω-веерных, τ-замкнутых ω-веерных, τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций.

4. Разработаны (совместно с В.А. Ведерниковым) теории ω-веерных и Ω-расслоенных формаций конечных групп (решение Задачи **(D)**).

5. Построена теория $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация (решение Задачи **(E)**).

Я выражаю сердечную благодарность своему учителю – доктору физико-математических наук, профессору Виктору Александровичу Ведерникову. Я глубоко признательна Виктору Александровичу за ценные идеи, реализованные в диссертации, за постоянную поддержку и неизменное внимание к моей работе.

Я благодарна моим коллегам по кафедре алгебры и геометрии Брянского государственного университета за помощь и полезные советы в процессе подготовки диссертации.

Выражаю искреннюю благодарность д.ф.-м.н. В.А. Артамонову, д.ф.-м.н. А.А. Махневу, д.ф.-м.н. В.С. Монахову, д.ф.-м.н. А.Н. Скибе за поддержку, ценные замечания и рекомендации. Я благодарна всем участникам научно-исследовательского семинара кафедры Высшей алгебры МГУ, семинара "Алгебра и логика" ИМ СО РАН, научно-исследовательского семинара отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, Красноярского алгебраического семинара за доброжелательную атмосферу и полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Ведерников В.А.* О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Укр. матем. конгресс – 2001. Секція 1. Праці. Київ. 2002. – С. 36–45.

2. *Каморников С.Ф., Селькин М.В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

3. *Каморников С.Ф.* О дополнении корадикала конечной группы // Изв. Гомельского госун-та им. Ф. Скорины. 2013. № 6. – С. 17–23.

4. *Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. – С. 122–127.

5. *Сафонов В.Г.* О минимальных кратно локальных не $\mathfrak{H}$-формациях конечных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. Вып. 8. – С. 109–138.

6. *Селькин В.М., Скиба А.Н.* О наследственных критических формациях // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 5. – С. 1145–1153.

7. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980. № 4. – С. 27–33.

8. *Скиба А.Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. Вып. 3. – С. 21–31.

9. *Скиба А.Н.* О критических формациях // Бесконечные группы и примык. алгебр. структуры. – Киев: ИМ АН Украины, 1993. – С. 258–268.

10. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

11. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. – С. 114–147.

12. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Доклады НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 4. – С. 5–8.

13. *Шеметков Л.А.* Ступенчатые формации групп // Матем. сборник. 1974. Т. 94. № 4. – С. 628–648.

14. *Шеметков Л.А.* Факторизации непростых конечных групп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. – С. 684–715.

15. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

16. *Шеметков Л.А.* Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюз. Симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 37–50.

17. *Шеметков Л.А.* О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 2. – С. 101–103.

18. *Шмигирев Э.Ф.* О некоторых вопросах теории формаций // В кн.: Конечные группы. – Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 213–225.

19. *Baer R.* Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. – P. 115–187.

20. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 507–528.

21. *Carter R.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. 1961. V. 75. – P. 136–139.

22. *Carter R., Hawkes T.* The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5. N 2. – P. 175–201.

23. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New Jork, 1992. – 891 c.

24. *Erickson R.* Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. – P. 1919–1938.

25. *Förster P.* Projektive Klassen endlicher Gruppen I. Schunck- und Gaschützklassen // Math. Z. 1984. V. 186. – P. 249–278.

26. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. – P. 93–107.

27. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80. N 4. – P. 300–305.

28. *Gaschütz W.* Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups – Canberra: Notes on Pure Mathematics 11, Austr. Nat. Univ., 1979. – 98 p.

29. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. – P. 98–105.

30. *Hall P.* On the Sylow system of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 316–323.

31. *Hall P.* On the system normalizers of a soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. – P. 507–528.

32. *Hall P.* The construction of soluble groups // J. Reine Angew. Math. 1940. V. 182. – P. 206–214.

33. *Hawkes T.* On formation subgroups of finite soluble group // J. London Math. Soc. 1968. V. 44. N 2. – P. 243–250.

34. *Huppert B.* Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen // Acta Sci. Math. 1961. V. 22. – P. 46–61.

35. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I – Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer, 1967. – 793 p.

36. *Mann A.* $\mathfrak{H}$-normalizers of a finite solvable groups // J. Algebra. 1970. V. 14. N 3. – P. 312–325.

37. *Schmid P.* Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. 1974. V. 137. N 1. – P. 31–48.

38. *Schunck H.* $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1967. V. 97. N 4. – P. 326–330.

39. *Shemetkov L.A.* On partially saturated formations and residuals of finite groups // Commun. Algebra. 2001. V. 29. N 9. – P. 4125–4137.

40. *Vedernikov V.A.* Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2001. V. 2. – P. 217–233.

41. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // roc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. – London: Cambridge Univ. Press, 1960. – P. 268–278. (Пер. на рус. яз.: Пути развития структурной теории конечных групп // Межд. мат. конгресс в Эдинбурге, 1958 г. (обзорн. докл.). – М.: Физматгиз, 1962. – С. 263–276).

Работы автора по теме диссертации, опубликованные в изданиях из перечня ВАК

42. *Сорокина М.М.* О композиционных и локальных критических формациях // Известия вузов. Математика. 2000. № 7. – С. 1–8.

43. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13. № 3. – С. 125–144.

44. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 1. – С. 43–60.

45. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* Критические Ω-расслоенные формации конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 2. – С. 269–282.

46. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* О критических Ω-расслоенных формациях конечных групп // Дискретная математика. 2006. Т. 18. № 1. – С. 106–115.

47. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 1. – С. 87–94.

48. *Сорокина М.М., Корпачева М.А.* Критические n-кратно ω-веерные формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2010. № 4. – С. 47–52.

49. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические ω-веерные τ-замкнутые формации конечных групп // Дискретная математика. 2011. Т. 23. № 1. – С. 94–101.

50. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω-канонические формации мультиоператорных T-групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2011. № 4. – С. 18–21.

51. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Критические Ω-расслоенные τ-замкнутые формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2012. № 4. – С. 75–79.

52. *Сорокина М.М.* Полувнутренние Ω-спутники Ω-расслоенных формаций конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2013. № 4. – С. 46–48.

53. *Каморников С.Ф., Сорокина М.М.* О дополняемости элементов решетки разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Вестник Брянского гос. ун-та: Точные и естеств. науки. 2014. № 4. – С. 9–14.

54. *Сорокина М.М.* τ-минимальные не $\mathfrak{F}$-группы для ω-веерных формаций и классов Фиттинга // Вестник Брянского гос. ун-та. 2015. № 3(26). – С. 420–422.

55. *Ведерников В.А., Сорокина М. М.* О дополнениях к корадикалам конечных групп // Матем. сборник. 2016. Т. 207. № 6. – С. 27–52.

56. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}$-проекторы и $\mathfrak{F}$-покрывающие подгруппы конечных групп // Сиб. матем. ж. 2016. Т. 57. № 6. – С. 1224–1239.

57. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы конечных групп // Сиб. матем. ж. 2017. Т. 58. № 1. – С. 64–82.

Прочие работы автора по теме диссертации

58. *Сорокина М.М., Силенок Н.В.* Критические Ω-биканонические нормально наследственные формации конечных групп // Изв. Гомельского гос. ун-та, № 5 (14), Вопросы алгебры – 18, 2002. – С. 125–133.

59. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* Минимальные ω-специальные не $\mathfrak{H}$-формации // Вестник Брянского гос. ун-та. 2003. № 2. – С. 144–148.

60. *Сорокина М.М., Котлярова М.В.* ω-центральные формации конечных групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2004. № 3. – С. 112–115.

61. *Сорокина М.М. Корпачева М.А.* О τ-замкнутости классов групп // Вестник Брянского гос. ун-та. 2005. № 4. – С. 192–194.

62. *Корпачева М.А., Сорокина М.М.* О максимальных τ-замкнутых подформациях τ-замкнутых формаций // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 36–41.

63. *Сорокина М.М., Сазоненко С.М., Симохина А.П.* О подгрупповых функторах // Вестник Брянского государственного университета. 2009. № 4. – С. 96–100.

64. *Петрушин П.В., Сорокина М.М.* О τ-минимальных не $\mathfrak{F}$-группах для Ω-расслоенной формации $\mathfrak{F}$ [Электронный ресурс] // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2016. № 1. – С. 36–41. – Режим доступа: http://scim-brgu.ru/wp-content/arhiv/UZ-2016-N1.pdf.

65. *Сорокина М.М.* Критические τ-замкнутые n-кратно ω-специальные формации конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science». – Будапешт, 2013. V. 8. – С. 71–75.

66. *Сорокина М.М., Петрушин П.В., Макухин Р.А.* О τ-замкнутых n-кратно ω-центральных и n-кратно Ω-композиционных формациях конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», II(4) Issue 32. – Будапешт, 2014. – С. 48–51.

67. *Сорокина М.М., Макухин Р.А.* О максимальном полувнутреннем ω-спутнике ω-веерной формации конечных групп // Межд. периодический научный журнал «Science and Education A New Dimension: Natural and Technical Science», III(8) Issue 73. – Будапешт, 2015. – С. 75–78.

68. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп//Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 5. - 25 с.

69. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Препринт: Брянск, БГПУ. 1999. № 6. – 23 с.

70. *Сорокина М.М.* О критических ω-веерных формациях конечных групп // Препринт: Брянск, БГУ, 2009. № 10. – 12 с.

71. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups of finite groups // Межд. конф. «Алгебра и логика: теория и приложения»: тез. докл. – Красноярск: СФУ, 2016. – С. 122–123.

72. *Ведерников В.А., Сорокина М.М.* $\mathfrak{F}^\omega$-нормализаторы и $\mathfrak{F}^\omega$-покрывающие подгруппы конечных групп // Межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии: тез. докл. – Казань: КФУ, 2016. – С. 125–126.

73. *Vedernikov V.A., Sorokina M.M.* On properties of $\mathfrak{F}^\omega$-projectors and $\mathfrak{F}^\omega$-covering subgroups of finite groups // Межд. научн. конф. "Акт. проблемы прикл. математики и физики": тез. докл. – Нальчик: ИПМА КБНЦ РАН, 2017. – С. 262–263.

74. *Sorokina M.M., Vedernikov V.A.* On the $\mathfrak{F}$-coradicals of finite groups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds, 2017: Abstracts of the Intern. Conf. and PhD-Master Summer School. – Yekaterinburg: UrFU, 2017. – P. 97.