На правах рукописи

Полковников Александр Николаевич

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ЭРМИТОВЫМИ ФОРМАМИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Красноярск 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Шлапунов Александр Анатольевич**

Официальные оппоненты:
Киселев Олег Михайлович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ФГБУН «Институт математики с вычислительным центром» УНЦ РАН, отдел дифференциальных уравнений, ведущий научный сотрудник;

Тулина Марина Ивановна, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Горно-Алтайский государственный университет», кафедра математики и методики преподавания математики, доцент.

Ведущая организация:
ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» СО РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится «06» апреля 2018 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Б1-01.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «___» февраля 2018 г.

И.о. ученого секретаря диссертационного совета — Нужин Яков Нифантьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Теория смешанных краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка активно развивалась в течение всего последнего столетия. Различные варианты таких задач рассматривались многими математиками с начала XX века. Так, еще в 1910 году С. Заремба[1] описал условия разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа в области с гладкой границей и непрерывными начальными данными Неймана и Дирихле на разных кусках границы.

Бурное развитие теории эллиптических задач пришлось на начало второй половины XX века, чему способствовали работы таких математиков как С. Агмон, А. Дуглис и Л. Ниренберг[2], Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженис[3], Ф. Браудер[4], С. Кампанато[5] и многие другие. Существенную роль в развитии краевых задач в целом и эллиптических задач в частности сыграли работы С.Л. Соболева, Л.Н. Слободецкого, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других известных ученых.

Одним из результатов явилось то, что, как оказалось, в случае, когда граница области является гладкой и выполнено условие коэрцитивности (см. (4) ниже), то фредгольмовость задачи эквивалентна так называемому условию Шапиро - Лопатинского[6,7]. Однако, в случае негладкой границы необходимо более детальное исследование проблемы.

Отметим, что при решении смешанных задач чаще всего пользуются либо методом потенциалов, либо методом эрмитовых форм и слабых решений. Идя вторым путем, на соответствующую эрмитову форму часто накладывают условие коэрцитивности, которое автоматически позволяет получить достаточно гладкое решение задачи вплоть до границы области, где ищется решение, если данные задачи также являются достаточно гладкими.

Однако, Ж. Кон[8] при изучении $\overline{\partial}$-задачи Неймана столкнулся с феноме-

---

[1]Zaremba, S. Sur un problème mixte relatifà l'équation de Laplace / S. Zaremba Bull. Acad. Sci. Cracovie, 1910. P. 314-344.

[2]Агмон, С. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

[3]Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес М.: Мир, 1971.

[4]Browder, F.E. On the spectral theory of strongly elliptic differential operators / F.E. Browder Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959.

[5]Campanato, S. Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziale lineari del tipo dell'elasticitá / S. Campanato Ann. della Scuola Norm. Superiore, Cl. di Sci, Ser. III, 13:2, pp. 223–258 (1959).

[6]Шапиро, З.Я. Об общих краевых задачах эллиптического типа / З.Я. Шапиро Изв. АН, сер. матем. 17, 1953. С. 539—562.

[7]Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным эллиптическим уравнениям / Я.Б. Лопатинский Укр. матем. журн. 5, 1953. С. 123—151.

[8]Kohn, J.J. Subellipticity of the $\overline{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions / J.J. Kohn Acta Math., 1979.

ном так называемой субэллиптичности. Именно, в этой задаче, при выполнении условия сильной эллиптичности, происходит потеря гладкости решения вблизи границы. Тем не менее, Ж. Кону удалось доказать фредгольмовость задачи на шкале пространств соболевского типа в псевдо-выпуклых областях с гладкой границей.

В настоящей работе рассматриваются операторные уравнения, порожденные некоэрцитивными эрмитовыми формами, соответствующими некоэрцитивным смешанным краевым задачам с граничными условиями робеновского типа для сильно эллиптических дифференциальных операторов в произвольных областях с липшицевой границей. При этом, вместо условий на геометрические свойства области мы накладываем некоторые ограничения на граничные операторы, более слабые, чем условия Шапиро-Лопатинского.

Наряду с этим мы также рассматриваем некоэрцитивные эрмитовы формы, соответствующие смешанным задачам для эллиптических с параметром операторов. Мотивацией для изучения таких задач является тот факт, что, использование преобразования Фурье по параметру выявляет тесную связь между эллиптическими с параметром задачами и начально краевыми задачами для параболических уравнений, см., например, работу М.С. Аграновича и М.И. Вишика[9], где рассмотрена задача с постоянными комплексными коэффициентами в области с гладкой границей при выполнении условия Шапиро-Лопатинского с параметром и доказана однозначная разрешимость этой задачи при достаточно больших по модулю значениях параметра.

Дальнейшее развитие теории эллиптических с параметром краевых задач можно наблюдать в работах таких математиков как Р. Денк и Л. Волевич[10], А.С. Маркус[11], Б.В. Пальцев[12], Н.Н. Тарханов и А.А. Шлапунов[13] и многих других. В настоящей работе рассматривается некоэрцитивная задача для эллиптического с параметром дифференциального оператора второго порядка. Мы также доказываем однозначную разрешимость таких задач при достаточно больших по модулю значениях параметра, позволяя при этом "слабо" меняться аргументу функции, содержащую этот параметр.

Таким образом, ослабляя условия на граничные дифференциальные операторы, мы, тем не менее, доказываем фредгольмовость соответствующих операторных уравнений в специальных пространствах соболевского типа (с

[9]Агранович, М.С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М.С. Агранович, М.И. Вишик Успехи мат. наук. 1964;19:53–161.

[10]Denk, R. Parameter-elliptic boundary value problems connected with the Newton polygon / R. Denk, L. Volevich Diff. Int. Eq. 2002;15(3):289-326.

[11]Markus, A.S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils /A.S. Markus Vol. 71. Providence, Rhode Island:Translations of Mathematical Monographs, AMS; 1988.

[12]Пальцев, Б.В. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях / Б.В. Пальцев // Мат. Сб. 1996;187:59–116.

[13]Shlapunov, A.A. Mixed problems with a parameter / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov Russ. J. Math. Phys., 12 (2005).

некоторой потерей гладкости, по сравнению с классическим результатами теории смешанных краевых задач), и при этом не накладывая ограничений на геометрические свойства области. Наряду с теорией разрешимости операторных уравнений, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, мы также изучаем их спектральные свойства и доказываем полноту корневых векторов соответствующих операторов в рассматриваемых пространствах.

Цель диссертационной работы — найти подходящие функциональные пространства для решения некоэрцитивных смешанных задач, отыскать условия разрешимости соответствующих операторных уравнений и доказать полноту систем их корневых векторов.

Методы исследования

В работе использованы методы функционально анализа, методы комплексного анализа, а также метод интегральных представлений.

Достоверность результатов

Основные результаты строго доказаны, опубликованы в рецензируемых журналах и докладывались на научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты носят теоретический характер и могут быть применены в теории смешанных краевых задач, теории псевдодифференциальных операторов и дифференциальных операторов в частных производных.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006) и в рамках гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1

Апробация результатов Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих семинарах и научных конференциях:

1. Красноярский городской семинар по комплексному анализу и алгебраической геометрии (Сибирский федеральный университет, 2014-2017);

2. Семинар по математическому анализу под руководством профессора Sylvie Paycha (Потсдам, Германия, июль 2015);

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь и наука: проспект Свободный», (Красноярск, 2013–2017гг.);

4. Международная конференция «VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике», (Ростов-на-Дону, 11-16 сентября 2016 г.).

Публикации и личный вклад

Основные результаты диссертации опубликованы в 4-х статьях ([1, 2, 3, 4]) и 5-ти тезисах ([5, 6, 7, 8, 9]). Все статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций, а статьи [2, 3, 4] опубликованы в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных SCOPUS и Web of Science.

Результаты статьи [3] получены автором самостоятельно, статьи [1, 2, 4] опубликованы в соавторстве с научным руководителем А.А. Шлапуновым. Вклад авторов в совместные работы равнозначен и неделим.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Список литературы содержит 69 наименований, а список работ автора по теме диссертации 9 наименований. Общий объем диссертации: 123 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертационной работы посвящена обзору литературы и результатов, полученных к настоящему моменту в теории смешанных краевых задач для дифференциальных эллиптических операторов второго порядка с граничными условиями робеновского типа (в частности, задача Заремба). Именно, **параграф 1.1** посвящен вопросам разрешимости смешанных задач, а **параграф 1.2** затрагивает вопросы спектральной теории смешанных задач для эллиптических и эллиптических с параметром операторов.

Во **второй главе** мы указываем некоторые достаточные условия фредгольмовости и разрешимости для некоэрцитивных смешанных задач.

Напомним, что эрмитова форма $h(\cdot, \cdot)$ называется коэрцитивной на пространстве Соболева $H^s(D)$ в области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, если она определяет на этом пространстве скалярное произведение, а соответствующая ему норма эквивалента исходной норме пространства $H^s(D)$.

В **параграфе 2.1** мы рассматриваем эрмитову форму

$$(u, v)_+ = \int\limits_D \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_j u \overline{\partial_i v}\, dx + (a_{0,0}u, v)_{L^2(D)} + (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)}, \qquad (1)$$

соответствующую дифференциальному оператору второго порядка в дивергентной форме

$$A_0(x, \partial)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u),$$

здесь $a_{i,j}(x)$ суть комплекснозначные измеримые ограниченные функции в области D с липшицевой границей ∂D, $a_{0,0}$ - неотрицательная измеримая ограниченная функция в D, а $\Psi : H^r(\partial D) \to L^2(\partial D)$ некоторый ограниченный линейный оператор при фиксированном $0 \le r \le 1/2$. Мы предполагаем, что матрица

$$\mathfrak{A}(x) = (a_{ij}(x))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

является эрмитовой и удовлетворяет условиям

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\overline{w}_i w_j \ge 0, \tag{2}$$

для всех $(x, w) \in \overline{D} \times \mathbb{C}^n$, и

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge m_0\,|\xi|^2, \tag{3}$$

для всех $(x, \xi) \in \overline{D} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ с некоторой положительной константой m_0. Оценки (2) и (3) означают, что оператор $A(x, \partial)$ сильно эллиптичен. Заметим, что если коэффициенты $a_{i,j}$ комплекснозначны, то эти оценки значительно слабее, чем условие строгой коэрцитивности эрмитовой формы, которое чаще всего используют при рассмотрении смешанных задач (см., например, работы М.С. Аграновича[14,15]), то есть, существование такой постоянной m, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\,\overline{w}_i w_j \ge m_0\,|w|^2 \tag{4}$$

для всех $(x, w) \in \overline{D} \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$.

Пусть теперь S есть некоторое подмножество границы ∂D. Обозначим через $C^1(\overline{D}, S)$ множество непрерывно дифференцируемых функций в замыкании $\overline{D}$ области D, равных нулю в некоторой (относительной) окрестности множества $\overline{S}$ в $\overline{D}$. Нетрудно указать простые условия, при которых форма $(.,.)_+$ определяет скалярное произведение на $C^1(\overline{D}, S)$, которые мы в дальнейшем будем считать всегда выполненными.

Пусть далее $H^+(D)$ есть пополнение пространства $C^1(\overline{D}, S)$ по норме $\|\cdot\|_+$, соответствующей скалярному произведению (1), а $H^1(D, S)$ – пополнение пространства $C^1(\overline{D}, S)$ по норме пространства Соболева $\|\cdot\|_{H^1(D)}$. Отметим, что пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в пространство $L^2(D)$, если, например, существует константа c_2, такая, что

$$a_{0,0} \ge c_2 > 0 \text{ в } D. \tag{5}$$

[14]Агранович, М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка / М.С. Агранович Функц. анализ и его прил., 2011.

[15]Агранович, М.С. Спектральные задачи в Липшицевых областях / М.С. Агранович СМФН, 2011.

Обозначим через $s = s(r)$ вещественное число, которое определяется следующим образом:

$$s = \begin{cases} 1/2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, & \text{если} \quad r = 0, \\ 1/2, & \text{если} \quad r = 0 \quad \text{и} \quad \partial D \in C^2, \\ 1/2 + r, & \text{если} \quad 0 < r \le 1/2. \end{cases}$$

Несмотря на отсутствие коэрцитивной оценки для нормы $\|\cdot\|_+$, для пространства $H^+(D)$ справедлива следующая теорема вложения (см. [1, 2]).
Теорема 4. *Пусть коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежат C^∞ в окрестности X замыкания D, выполнены неравенства (2), (3) и существует константа $c_1 > 0$, такая, что*

$$\|\Psi u\|_{L^2(\partial D)} \ge c_1 \|u\|_{H^r(\partial D)} \text{ для всех } u \in H^r(\partial D, S).$$

Если выполнено неравенство (5) или оператор $A_{0,0}$ является сильно эллиптическим в окрестности X замыкания D и

$$\int\limits_X \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_j u \overline{\partial_i u} \, dx \ge m_1 \|u\|^2_{L^2(X)}$$

для всех $u \in C^\infty_{\mathrm{comp}}(X)$, где $m_1 > 0$ - константа, не зависящая от u, то пространство $H^+(D)$ непрерывно вложено в $H^s(D)$.

Отметим, что случай, когда оператор Ψ имеет порядок нуль и задается с помощью умножения на функцию, рассмотрен в работе А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова[16]. Также эта теорема была расширена на случай весовых пространств[17].

Случай, когда выполнена коэрцитивная оценка, хорошо известен[18]. В этом случае пространство $H^+(D)$ будет непрерывно вложено в $H^1(D)$.

В **параграфе 2.2** мы рассматриваем смешанную задачу для дифференциального оператора второго порядка

$$A(x, \partial) u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{i,j}(x) \partial_j u) + \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u + a_0(x) u,$$

для которого выполнены оценки (2) и (3), с граничным оператором робеновского типа,

$$B(x, \partial) = b_1(x) \partial_c + B_0,$$

[16] Shlapunov, A. On completeness of root functions of Sturm-Liouville problems with discontinuous boundary operators / A. Shlapunov, N. Tarkhanov // J. of Differential Equations. 2013;10:3305–3337.

[17] Шлапунов, А.А. Задачи Штурма–Лиувилля в весовых пространствах в областях с негладкими ребрами. I, II / А.А. Шлапунов, Н.Н. Тарханов // Мат. труды, 18(1) (2015), 118—-189.

[18] Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михаилов М.: Наука, 1976.

где $b_1(x)$ есть комплекснозначная ограниченная функция на границе ∂D, ∂_c - это конормальная производная относительно оператора A,

$$\partial_c = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\, \nu_i \partial_j,$$

а B_0 это плотно определенный линейный (псевдодифференциальный) оператор в $L^2(\partial D)$,

$$B_0 = \chi_S + b_1\left(\Psi^* \Psi + \delta B_0\right).$$

Мы позволяем исчезать функции $b_1(x)$ на открытом (в относительной топологии) связном подмножестве S границы ∂D, с кусочно гладкой границей ∂S, здесь χ_S есть характеристическая функция множества S на ∂D, а δB_0 это некоторое возмущение оператора Ψ.

Рассматривается следующая задача:

Задача 1. *Пусть в области D дано распределение f, требуется найти такое распределение u в D, что, в подходящем смысле,*

$$\begin{cases} A(x,\partial)u = f & \text{в области } D,\\ B(x,\partial)u = 0 & \text{на } \partial D. \end{cases}$$

Обозначим через ι оператор непрерывного вложения

$$\iota : H^+(D) \hookrightarrow L^2(D),$$

а через $H^-(D)$ пополнение пространства $H^1(D,S)$ по норме

$$\| u \|_{H^-} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left|(v,u)_{L^2(D)}\right|}{\| v \|_{H^+}},$$

где $v \in H^1(D,S)$. Пространство $H^-(D)$ можно охарактеризовать как двойственное к пространству $H^+(D)$ относительно спаривания в $L^2(D)$ (обозначим его $<.,.>$). Также обозначим через ι' оператор непрерывного вложения

$$\iota' : L^2(D) \to H^-(D).$$

Под $Q(u,v)$ мы будем понимать полуторалинейную форму

$$Q(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j}\partial_i u, \partial_j v)_{L^2(D)} + (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)}$$
$$+ (\Psi(u), \Psi(v))_{L^2(\partial D)}, + \sum_{j=1}^{n} (a_j(x)\partial_j u, v)_{L^2(D)} + (a_0(x)u, v)_{L^2(D)},$$

которая при любом фиксированном $u \in H^+(D)$ определяет непрерывный линейный функционал на $H^+(D)$, если для некоторой константы $c > 0$ выполнено неравенство

$$\left|(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)}\right| \leq c \, \|u\|_+ \, \|v\|_+$$

для всех $u, v \in H^1(D, S)$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи 1.

Задача 2. *Пусть дана функция $f \in H^-(D)$, требуется найти функцию $u \in H^+(D)$ такую, что*

$$Q(u, v) = < f, v >, \tag{6}$$

для любого $v \in H^+(D)$.

Задачу 2 можно сформулировать в следующем виде: для данного $f \in H^-(D)$ найти $u \in H^+(D)$, удовлетворяющую соотношению

$$(u, v)_+ + (\delta L_B u + \delta L_c u, v)_{L^2(D)} = < f, v > \tag{7}$$

для любого $v \in H^+(D)$, где оператор $\delta L_B : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением

$$(\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} ,$$

а оператор $\delta L_c : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u + \delta a_0 \, u, v \Big)_{L^2(D)}.$$

Если мы дополнительно обозначим через $L_0 : H^-(D) \to H^+(D)$ оператор, индуцированный скалярным произведением $(u, v)_+$, то выражению (7) можно придать следующий вид:

$$(Lu, v)_{L^2(D)} = < f, v >,$$

где через L мы обозначили сумму операторов

$$L = (L_0 + \delta L_B + \delta L_c) : H^-(D) \to H^+(D).$$

Следующая лемма (см. [1]) об однозначной разрешимости для операторных уравнений, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, является аналогом соответствующих теорем в коэрцитивном случае.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда оператор $L_0 : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратим и $\|L_0\| = \|L_0^{-1}\| = 1$.*

Сформулируем более общий результат (см. [1, 2]).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Если функционал $g(v) = (\delta B_0 u, v)_{L^2(\partial D)}$ порождает ограниченный оператор δL_B из $H^+(D)$ в $H^-(D)$*

при $\|\delta L_B\| < 1$, или $g(v)$ порождает компактный оператор из $H^+(D)$ в $H^-(D)$, то оператор L является фредгольмовым оператором с нулевым индексом.

Таким образом, оператор L_0 непрерывно обратим, а в силу теоремы 4 операторы δL_B и δL_c можно рассматривать как малое и компактное возмущение оператора L_0 соответственно.

В **параграфе 2.3** мы рассматриваем семейство некоэрцитивных смешанных задач с параметром, а именно, мы рассматриваем оператор

$$A(x,\partial,\lambda)u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{i,j}(x)\partial_j u) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u + a_0(x)u + E(\lambda)u$$

в области D с комплексным параметром λ, где

$$E(\lambda)u = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\partial_j u + a_0^{(1)}(x)u\right) + \lambda^2 a_0^{(2)}(x)u.$$

Здесь коэффициенты $a_{i,j}$, a_j, $a_j^{(1)}$, $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ суть комплекснозначные функции класса $L^\infty(D)$, а матрица $\mathfrak{A}(x) = (a_{i,j}(x))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ эрмитова и для нее справедливы неравенства (2) и (3).

Более того, предположим, что оператор $A(x,\partial,\lambda)$ является эллиптическим с параметром. Напомним, оператор $A(x,\partial,\lambda)$ называется эллиптическим с параметром на луче $\Gamma = \{\arg(\lambda) = \varphi_\Gamma\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j + \lambda\sum_{j=1}^{n} a_j^{(1)}(x)\zeta_j + \lambda^2 a_0^{(2)}(x) \neq 0$$

для всех $x \in \overline{D}$ и всех $(\lambda,\zeta) \in (\Gamma \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0,0\}$.

Мы рассматриваем следующую задачу:

Задача 5. *Для данного распределения f в D, найти распределение u в D, которое удовлетворяет, в обобщенном смысле,*

$$\left\{\begin{array}{rcll} A(x,\partial,\lambda)u & = & f & \text{в} \quad D, \\ B(x,\partial)u & = & 0 & \text{на} \quad \partial D. \end{array}\right.$$

Тщательному изучению подвергается наиболее важный случай для приложений, когда $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$. Оператор $L(\lambda) : H^-(D) \to H^+(D)$, соответствующий обобщенной постановке задачи, принимает в этом случае следующий вид

$$L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C,$$

где оператор $C : H^-(D) \to H^+(D)$ индуцирован выражением $(a_0^{(2)}u, v)_{L^2(D)}$.

Следующая теорема (см. [2]) обобщает теорему о разрешимости смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора[19] на случай некоэрцитивных форм и “слабо” меняющийся аргумент функции, содержащей параметр.

Теорема 6. *Пусть либо Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также $E(\lambda) = \lambda^2 a_0^{(2)}$, выполнены условия теоремы 4 и*

$$a_0^{(2)} \neq 0 \text{ почти всюду в } D,$$

$$\cos(\varphi_0(x) + 2\varphi_\Gamma) \geq \theta_1(\Gamma) = \theta_1 > -1 \text{ для всех } x \in \overline{D}.$$

Если $\varphi_0 \in C(\overline{D})$, $L(\lambda)$ образует голоморфное семейство фредгольмовых операторов и $\|\delta L_B\|^2 + (\max(0, -\theta_1(\Gamma)))^2 < 1$, то

1) *существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что операторы $L(\lambda) : H^+(D) \to H^-(D)$ непрерывно обратимы при всех $\lambda \in \Gamma$, для которых $|\lambda| \geq |\gamma_0|$;*

2) *операторы $L(\lambda)$ непрерывно обратимы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, кроме счетного множества $\{\lambda_\nu\}$, не имеющего предельных точек в $\mathbb{C}$.*

Отметим, что для коэрцитивного случая подобные результаты можно найти, например, в работах Б.В. Пальцева[20] или Р. Денка и Л.Р. Волевича[21].

Глава 3 посвящена спектральным свойствам рассматриваемых операторов. В **параграфе 3.1** мы рассматриваем спектральные свойства слабых возмущений компактных самосопряженных операторов.

Напомним, ненулевая функция $u_\nu \in \mathcal{H}$ для соответствующего собственного значения $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$ называется корневой функцией линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве $\mathcal{H}$, если для некоторого натурального числа m справедливо

$$(\mathcal{A} - \lambda_\nu I)^m u_\nu = 0,$$

где $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ есть единичный оператор. Ясно, что понятие корневой функции при $m = 1$ совпадает с понятием собственной функции.

Применяя известную теорему Келдыша[22,23] о полноте корневых функций слабых возмущений компактных самосопряженных операторов, мы получаем следующий результат [2, 3].

[19]Агранович, М.С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида / М.С. Агранович, М.И. Вишик // Успехи мат. наук. 1964;19:53–161.

[20]Пальцев, Б.В. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях / Б.В. Пальцев // Мат. Сб. 1996;187:59–116.

[21]Denk, R. Parameter-elliptic boundary value problems connected with the Newton polygon / R. Denk, L. Volevich // Diff. Int. Eq. 2002;15(3):289-326.

[22]Келдыш, М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М.В. Келдыш Доклад Академии Наук СССР, 1951.

[23]Келдыш, М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М.В. Келдыш Успехи мат. наук, т.26, вып. 4(160), 1971.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда, для любого обратимого оператора $L_0 + \delta L_c : H^+(D) \to H^-(D)$, где δL_c это компактный оператор, система корневых функций компактного оператора*

$$P_1 = \iota' \iota (L_0 + \delta L_c)^{-1} : H^-(D) \to H^-(D)$$

полна в пространствах $H^-(D)$, $L^2(D)$ и $H^+(D)$.

Параграф 3.2 посвящен изучению спектральных свойств эллиптических с параметром операторов. А именно, предположим, что $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и $F(\lambda)$ это голоморфная функция в проколотой окрестности точки λ_0, принимающая свои значения в пространстве $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ ограниченных линейных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2. Точка λ_0 называется характеристической точкой функции $F(\lambda)$, если существует голоморфная функция $u(\lambda)$ в окрестности λ_0 со значениями в H_1, такая, что $u(\lambda_0) \neq 0$, но $F(\lambda)u(\lambda)$ продолжается до голоморфной функции (со значениями в H_2) в некоторую окрестность точки λ_0, и исчезает в этой точке. Как обычно, мы назовем $u(\lambda)$ корневой функцией семейства $F(\lambda)$ в λ_0.

Обозначим через $\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^-(D)$ линейный ограниченный оператор, индуцированный выражением $(|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}$. Заметим, что если выполнено

$$a_0^{(2)} \neq 0 \text{ почти всюду в } D, \tag{8}$$

то умножение на функцию $|a_0^{(2)}| \in L^\infty(D)$ индуцирует ограниченный инъективный самосопряженный оператор $\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$. Обозначим также через $h(\cdot, \cdot)$ следующую эрмитову форму:

$$h(u, v) = (|a_0^{(2)}|u, v)_{L^2(D)}.$$

Заметим, что если выполнено (8), то она определяет скалярное произведение на пространстве $L^2(D)$. Обозначим пространство $L^2(D)$ с этим скалярным произведением через $L^2_h(D)$.

Пусть теперь $\mathcal{H}$ есть пространство Гильберта, а оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ компактен. Тогда оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ будет компактным и самосопряженным. Из этого следует, что существует единственный неотрицательный компактный самосопряженный квадратный корень из оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, обозначим его $|\mathcal{A}|$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта, оператор $|\mathcal{A}|$ имеет счетное число собственных значений $s_\nu(\mathcal{A})$, которые часто называют s - числами оператора $\mathcal{A}$.

Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$, если

$$\sum_\nu |s_\nu(\mathcal{A})|^p < \infty.$$

При этом компактный оператор $\mathcal{A}$ называют оператором конечного порядка, если он принадлежит классу Шаттена $\mathfrak{S}_p$. Нижнюю грань из таких p называют порядком оператора $\mathcal{A}$.

Применяя теорему Келдыша к операторным уравнениям, соответствующим некоэрцитивной смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора, получаем следующий результат (см. [2, 3]).

Теорема 9. *Пусть выполнено (8). В условиях теоремы 4, операторы*

$$L_0^{-1}\mathfrak{C} : H^+(D) \to H^+(D),\ \mathfrak{C}L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D),\ \iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0 : L^2(D) \to L^2(D)$$

являются компактными операторами конечного порядка,

$$ord(\mathfrak{C}L_0^{-1}) = ord(L_0^{-1}\mathfrak{C}) = ord(\iota L_0^{-1}\iota'\mathfrak{C}_0) = n/(2r+1),$$

причем система собственных векторов оператора $L_0^{-1}\mathfrak{C}$ полна в пространствах $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$.

Наряду с компактными возмущениями мы также изучаем спектральные свойства при малых возмущениях исследуемых операторов. Обозначим через φ_0 аргумент функции $a_0^{(2)}(x)$. Справедлива следующая теорема [2, 3], использующая теорию лучей медленного роста (см., например, работу С. Агмона[24])

Теорема 10. *Пусть либо оператор Ψ задается с помощью умножения на функцию $\psi \in L^\infty(\partial D)$, либо $\partial D \in C^\infty$, а Ψ является псевдодифференциальным оператором на ∂D. Пусть также выполнены условия теоремы 4, неравенство (8) и*

$$\Phi = \sup_{x,y\in\overline{D}} (\varphi_0(x) - \varphi_0(y)) < \pi(2r+1)/2n.$$

Если $\varphi_0 \in C^{0,1}(\overline{D})$ и

$$\|\delta L_B\|^2 + (\max(0, -\cos((\pi(2r+1) - 2n\Phi)/4n)))^2 < 1,$$

то мы имеем:

1) для любого $\varepsilon > 0$ все характеристические значения λ_ν (кроме конечного числа) семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_B + \delta L_c + \lambda^2 C$ принадлежат углам

$$\{|\arg(\lambda) \pm \pi/2| < \pi(2r+1)/2n + \varepsilon\},$$

причем $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = +\infty$;

2) система корневых векторов семейства $L(\lambda) = L_0 + \delta L_c + \delta L_B + \lambda^2 C$ полна в пространствах $H^+(D)$, $H^-(D)$ и $L^2(D)$.

[24] Agmon, S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems / S. Agmon Comm. Pure Appl. Math., 1962.

В **четвертой главе** мы приводим несколько примеров, а также используем полученные результаты для изучения условий разрешимости некорректной задачи Коши для оператора Коши-Римана и построения формул Карлемана для ее решений. А именно, текущий прогресс в теории некоэрцитивных задач типа Зарембы позволил нам упростить метод, используемый в работе А.А. Шлапунова и Н.Н. Тарханова[25], и получить новый критерий разрешимости задачи Коши, а так же построить ее точные и приближенные решения.

Более подробно, возмущая задачу Коши для системы Коши-Римана $\overline{\partial} u = f$ в D с граничными данными на замкнутом множестве $S \subset \partial D$, мы получаем семейство смешанных задач типа Зарембы для уравнения Лапласа, зависящее от малого параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ в граничном условии. Несмотря на то, что смешанные задачи содержат некоэрцитивные граничные условия на $\partial D \setminus S$, каждая из них имеет единственное решение в подходящем гильбертовом пространстве $H^+(D)$, непрерывно вложенном в пространство Лебега $L^2(\partial D)$ и в пространство Соболева-Слободецкого $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$. В диссертации показано, что соответствующее семейство решений $\{u_\varepsilon\}$ сходится в $H^+(D)$ к решению задачи Коши (если оно существует). Также мы доказываем, что существование решения задачи Коши в $H^+(D)$ эквивалентно ограниченности семейства $\{u_\varepsilon\}$ в этом пространстве. Таким образом, мы получили условия разрешимости для задачи Коши и эффективный метод построения ее решения в виде формул карлемановского типа.

Результаты этой главы опубликованы в работе [4]. По сравнению с работой[25], мы рассматриваем несколько другие пространства Соболевского типа. Кроме того, вместо слабо сходящейся последовательности $\{u_\varepsilon\}$ в $L^2(D)$ при $\varepsilon \to +0$, мы получаем последовательность, сходящуюся к решению по норме пространства $H^{1/2-\delta}(D)$ при любом $\delta > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы следующие:

1. Доказана теорема о вложении в шкалу пространств Соболева-Слободецкого для пространств соболевского типа, порожденных одним классом некоэрцитивных эрмитовых форм.

2. Изучены условия разрешимости некоэрцитивных смешанных задач в пространствах, порожденных соответствующими эрмитовыми формами. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости и фредгольмовости для данных задач.

[25] Shlapunov, A.A. Mixed problems with a parameter / A.A. Shlapunov, N. Tarkhanov // Russ. J. Math. Phys., 12 (2005).

3. Описаны спектральные свойства операторов, индуцированных некоэрцитивными эрмитовыми формами. Получены критерии полноты корневых функций в рассматриваемых пространствах.

4. Построены формулы Карлемана для некорректной задачи Коши для оператора Коши-Римана в плоских областях, описаны условия ее разрешимости в специальных пространствах, порожденных подходящими некоэрцитивными формами.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Polkovnikov, A.N. On the spectral properties of a non-coercive mixed problem associated with $\overline{\partial}$-operator / A.N. Polkovnikov, A.A. Shlapunov // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2013. — V. 6(2) — P. 247—261.

2. Polkovnikov, A. On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators / A. Polkovnikov, A. Shlapunov // Math. Commun. 2015. — V. 20(2) — P. 131–150.

3. Polkovnikov, A.N. On the completeness of root functions of a holomorphic family of non-coercive mixed problem / A.N. Polkovnikov // Compl. Variables and Elliptic Equations. 2016. — V. 61(9). — P. 1223–1240.

4. Полковников, А.Н. О построении формул Карлемана с помощью смешанных задач с граничными условиями, содержащими параметр / А.Н. Полковников, А.А. Шлапунов // Сибирский математический журнал, 2017. V. 58(4), 870–884.

5. Полковников, А.Н. О спектральных свойствах одной некоэрцитивной смешанной задачи ассоциированной с оператором Коши-Римана / А.Н. Полковников // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. Красноярск, 15–25 апреля 2013. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2013.

6. Полковников, А.Н. О корневых функциях одной некоэрцитивной смешанной задачи для оператора эллиптического с параметром / А.Н. Полковников // Молодежь и наука: сборник материалов X Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 80-летию образования Красноярского края. Красноярск, 15–25 апреля 2014. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2014.

7. Полковников, А.Н. О разрешимости и спектральных свойствах некоэрцитивных смешанных задач для эллиптического с параметром оператора / А.Н. Полковников // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2015». Красноярск, 15–25 апреля 2015. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2015.

8. Полковников, А.Н. Об одной некоэрцитивной смешанной задачи для эллиптического с параметром оператора / А.Н. Полковников // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодёжь и наука: проспект Свободный-2016». Красноярск, 15–25 апреля 2016. [Электронный ресурс] — Красноярск : Сибирский федеральный университет. — 2016.

9. Polkovnikov, A.N. On non-coercive mixed problems for parameter-dependent elliptic operators / A.N. Polkovnikov // Proceedings «VI Russian-Armenian conference on mathematical analysis, mathematical physics and analytical mechanics», Rostov-on-Don, 11 - 16 September 2016. — Rostov-on-Don : Don State Technical University. — 2016.