На правах рукописи

Почекутов Дмитрий Юрьевич

Диагональные последовательности коэффициентов Лорана мероморфных функций многих переменных и их применение

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2010

Работа выполнена в Институте математики Сибирского федерального университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Цих Август Карлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Чуешев Виктор Васильевич
	доктор физико-математических наук, доцент Сафонов Константин Владимирович
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится 19 ноября 2010 г. в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "_15_" октября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы

По всей видимости, впервые диагональная последовательность коэффициентов степенного ряда нескольких переменных была рассмотрена Пуанкаре[1] при исследовании аномалий движения планет.

Поскольку не существует универсального определения асимптотического ряда, зависящего от нескольких переменных, достаточно мотивированным является вопрос об описании асимптотик диагональных последовательностей коэффициентов ряда. Коэффициенты ряда Тейлора часто имеют комбинаторный смысл, поэтому такая задача является весьма важной в перечислительной комбинаторике[2]. Основное состояние термодинамического ансамбля в статистической физике находится с помощью метода Дарвина-Фаулера[3], который состоит в отыскании асимптотики диагональной последовательности коэффициентов ряда Лорана некоторой мероморфной функции двух переменных.

В работе Циха[4] была решена проблема устойчивости двумерного цифрового фильтра на основании описания асимптотики диагональной последовательности для ряда Тейлора мероморфной функции двух переменных. Подходы, намеченные в этой статье, а именно, представление с помощью методов теории вычетов диагонального коэффициента в виде осциллируюшего интеграла и последующее изучение такого интеграла с помощью метода стационарной фазы, в случае многих переменных используются Пемантлом и Вильсоном[5].

В известной монографии Гельфанда, Зелевинского, Капранова[6] было дано определение амебы алгебраической гиперповерхности. В рабо-

[1] Пуанкаре А. *Избранные труды в трех томах.* Т 1. М.: Наука, 1971.

[2] Pemantle R., Wilson M., SIAM Review **50** (2008), 199–272.

[3] Darwin C.G., Fowler R.H., Phil. Mag. **44** (1922), 823–842.

[4] Цих А.К., Матем. сб. **182**:11 (1991), 1588–1612.

[5] Pemantle R., Wilson M.C., Journal of Combinatorial Theory, Series A. **97**:1 (2002), 129–161.

[6] Gelfand I, Kapranov M., Zelevinsky A., *Discriminants, Resultants and Multidimentional Determinants.* Boston: Bikhäuser, 1994.

те Лейнартаса, Пассаре, Циха[7] было показано, что нагляднее описывать асимптотику диагональной последовательности ряда Лорана рациональной фукнции в терминах амебы полярной гиперповерхности и понятия логарифмического отображения Гаусса этой гиперповерхности. В ходе работы над диссертацией выяснилось, что при обобщении метода Дарвина-Фаулера на случай ансамбля, системы которого характеризуются n-мерными параметрами, необходимо рассматривать амебы произвольных комплексных гиперповерхностей.

При исследовании степенного ряда (по положительным степеням) весьма важным является вопрос принадлежности суммы этого ряда какому-либо классу функций: рациональных, алгебраических, D-конечных (Фурштенберг[8], Сафонов[9], Липшиц[10,11]). Некоторые признаки принадлежности могут быть получены в терминах диагональных последовательностей. Например, еще Полиа[12] заметил, что сумма ряда алгебраична, если он является производящей функцией диагональной последовательности коэффициентов ряда Тейлора двух переменных, а Сафоновым[13] доказано обращение этого факта.

Таким образом, вопрос об описании асимптотик диагональных последовательностей и их производящих функций привлекал внимание многих исследователей на протяжении последних ста лет. Он остается актуальным и в настоящее время, причем не только для рациональных, но и для мероморфных функций.

Цель диссертации

Цель диссертации состоит в построении конструктивных формул для асимптотик диагональных последовательностей коэффициентов Лорана

[7] Лейнартас Е., Пассаре М., Цих А., Матем. сб. **199**:10 (2008), 87–104.
[8] Furstenberg H., J. of Algebra. **7** (1967), 271–277.
[9] Сафонов К.В., Доклады Акад. Наук. **424**:1 (2009).
[10] Lipshitz L., J. of Algebra. **122** (1989), 353–373.
[11] Denef J., Lipshitz L., J. Number Theory. **26** (1987), 46–67.
[12] Polya G., L'Enseignement mathématique. **22** (1922), 38–47.
[13] Сафонов К.В., Матем. заметки. **41**:3 (1987).

мероморфных функций многих переменных, а также в исследовани задачи об алгебраичности производящих функций таких последовательностей в случае коэффициентов рациональной функции. В качестве приложений – исследовать многопараметрическую модель квантовой термодинамики.

Методы исследования

В работе используются методы многомерной теории вычетов и интегральных представлений. Большую роль играет понятие амебы комплексной гиперповерхности полюсов мероморфной функции. С помощью этого понятия кодируется ряд Лорана мероморфной функции и его область сходимости. В совокупности с теорией вычетов и интегральных представлений методом стационарной фазы исследуется асимптотика коэффициентов Лорана вдоль заданных направлений. В задаче об алгебраичности производящей функции используются методы алгебраической топологии, а именно, свойства гомологических циклов, разделяющих наборы гиперповерхностей в комплексном многообразии.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в многомерном комплексном анализе, статистической физике и перечислительной комбинаторике.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) красноярских городских научних семинарах по комплексному анализу (под руководством проф. А.М. Кытманова и А.К. Циха) и по алгебраической геометрии (под руководством проф. А.К. Циха) (2007-2010, СФУ);

2) Международной научной конференции “Студент и научно-технический прогресс” (Новосибирск, апрель 2007);

3) Международной научной конференции “Геометрия и анализ на комплексных многообразиях" (Красноярск, август 2007);

4) Международной конференции “KAUS” (Стокгольм, январь 2008);

5) втором русско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Москва, сентябрь 2008);

6) Международной научной конференции “Аналитические функции многих комплексных переменных" (Красноярск, август 2009);

7) научном семинаре по анализу на многообразиях с особенностями (июнь 2010, Потсдамский университет, Германия, руководитель проф. Н.Н. Тарханов);

8) научном семинаре по алгебраической геометрии (июль 2010, Свободный университет Берлина, Германия, руководитель проф. К. Альтман).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы с исчерпывающей полнотой в 2 статьях и 2 тезисах, из них 3 работы выполнены без соавторов, в том числе статья, опубликованная в Сибирском математическом журнале, входящем в перечень ВАК.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста и заключения. Список литературы содержит 42 наименования. Работа изложена на 75 страницах.

Поддержка

Финансовая помощь диссертанту осуществлялась в рамках грантов НШ-2427.2008.1, НШ-7347.2010.1, РФФИ-09-09-00762, МО и Науки РФ 2.1.1/4620, молодежных проектов СФУ, проекта «Гибридные системы» Бранденбурского технического университета (г. Котбус, Германия), а также при поддержке «Фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса».

Содержание работы

Во **введении** расскрывается актуальность темы диссертационного исследования, а также кратко перечисляются основные результаты. Основной текст разбит на три главы.

Первая глава посвящена изучению асимптотики кратной последовательности коэффициентов ряда Лорана мероморфной функции.

Пусть F – мероморфная функция n переменных, и

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha \tag{1.1}$$

некоторый ее ряд Лорана с центром в нуле. *Диагональной последовательностью* коэффициентов ряда называют одномерную последовательность

$$\{c_{k\cdot q}\} = c_{k\cdot q_1,\ldots,k\cdot q_n},\ k \in \mathbb{Z}$$

полученную из $\{c_\alpha\}$ сужением мультиндекса α на прямую с фиксированным направляющим вектором $q \in \mathbb{Z}^n_* = \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Важную роль при изучении асимптотики диагональной последовательности играет понятия амебы для полярной гиперповерхности мероморфной функции (1.1).

Введем для комплексного тора $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ обозначение $\mathbb{T}$.

Определение 1.1[14]**.** *Амебой* $\mathcal{A}_V$ *комплексно-алгебраической гиперповерхности*

$$V = \{z \in \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$$

(или полинома Q) называется образ V при отображении

$$\mathrm{Log} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^n,$$

определенном формулой

$$\mathrm{Log} : (z_1, \dots, z_n) \to (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|).$$

Связь между комбинаторикой многогранника Ньютона $\mathcal{N}_Q$ полинома Q и структурой дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ амебы описывает следующая теорема Форсберга, Пассаре и Циха[15].

Теорема. *На множестве связных компонент* $\{E\}$ *дополнения* $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ *существует инъективная функция порядка*

$$\nu : \{E\} \to \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_Q$$

такая, что двойственный конус $C^{\vee}_{\nu(E)}$ *к многограннику Ньютона в точке* $\nu(E)$ *есть конус рецессии компоненты* E*.*

Имеется взаимнооднозначное соответствие между связными компонентами $\{E_\nu\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ и разложениями Лорана (с центром в нуле) несократимой рациональной функции $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Множества $\mathrm{Log}^{-1}(E_\nu)$ и являются областями сходимости соответствующих разложений Лорана. Поэтому можно идентифицировать такое разложение с помощью компоненты дополнения к амебе или целочисленной точки многогранника Ньютона.

Вместо полинома Q рассмотрим теперь ряд Лорана переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$:

$$Q(z) = \sum_{\alpha \in A \subset \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha.$$

---

[14] Gelfand I, Kapranov M., Zelevinsky A. Op. cit.

[15] Forsberg M., Passare M., Tsikh A., Adv. in Math. **151** (2000), 54–70.

Предполагаем, что его область сходимости G непустая, и что $Q(z) \not\equiv 0$. Также будем предполагать, что Q имеет нули в $G \cap \mathbb{T}^n$. Для гиперповерхности

$$V = \{z \in G \cap \mathbb{T}^n : Q(z) = 0\}$$

нулей суммы ряда $Q(z)$ в области G определим амебу также, как и в алгебраическом случае: $\mathcal{A}_V = \mathrm{Log}(V)$.

Введем обозначение

$$\mathcal{G} = \mathrm{Log}(G)$$

для образа области сходимости G ряда Q. Хорошо известно[16], что $\mathcal{G}$ – выпуклая область. В алгебраическом случае, когда Q – полином, $\mathcal{G}$ совпадает со всем $\mathbb{R}^n$, а амеба $\mathcal{A}_V$ является собственным подмножеством в $\mathcal{G}$ с открытым дополнением. В общем случае это не так, и может иметь место равенство $\mathcal{A}_V = \mathcal{G}$. Чтобы исключить эту ситуацию, потребуем, чтобы носитель A ряда Q лежал в некотором заостренном конусе, т.е. чтобы замыкание $\mathcal{N}$ выпуклой оболочки $ch(A)$ не содержало прямых. Следующее утверждение обобщает на неалгебраический случай результат М.А. Мкртчяна и А.П. Южакова[17], и частично – цитированную выше теорему Форсберга, Пассаре и Циха.

Теорема 1.1. *Если для ряда Q множество $\mathcal{N} = \overline{ch(A)}$ не содержит прямых, то дополнение $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}_V \neq \varnothing$. Множеству вершин ν многогранника $\mathcal{N}$ соответствует семейство попарно различных связных компонент $E = E_\nu$ дополнения $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}_V$.*

Контуром[18] $\mathcal{C}_V$ *амебы* $\mathcal{A}_V$ называется множество критических значений отображения Log, суженного на гиперповерхность V :

$$\mathrm{Log} : V \to \mathbb{R}^n.$$

[16] Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука, 1964.

[17] Мкртчян М.А., Южаков А.П., Изв. Акад. Наук АрмССР. **17** (1982), 99–105.

[18] Passare M., Tsikh A., Contemporary maths. **377** (2005), 275–288.

Пусть $U \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ малая окрестность точки $z \in \operatorname{reg} V$. Выберем в U ветвь голоморфного отображения $\log_U : U \to \mathbb{C}^n$. Тогда логарифмическое отображение Гаусса поверхности V – это отображение

$$\gamma : \operatorname{reg} V \to \mathbb{CP}_{n-1},$$

которое точке z ставит в соответствие нормальную прямую к образу $\log_U(V)$ в точке $\log_U(z)$. Очевидно, действие $\gamma(z)$ не зависит от выбора ветви $\log_U$. В координатной записи оно задается формулой[19]:

$$\gamma(z) = \left(z_1 \frac{\partial Q}{\partial z_1} : \ldots : z_n \frac{\partial Q}{\partial z_n} \right).$$

Известно [19], что контур амебы

$$\mathcal{C}_V = \operatorname{Log}\left(\gamma^{-1}(\mathbb{RP}_{n-1})\right),$$

иными словами, логарифмическое отображение Гаусса переводит критические точки отображения $\operatorname{Log}|_V$ в вещественные. Обращение $\gamma^{-1}(q)$ логарифмического отображения Гаусса является решением системы уравнений

$$\begin{cases} Q(z) = 0, \\ q_n z_i Q_{z_i} - q_i z_n Q_{z_n} = 0, \ i = 1, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $Q_{z_i} = \frac{\partial Q}{\partial z_i}$. Если V – алгебраическая гиперповерхность в торе $\mathbb{T}^n$, то степень $\deg \gamma$ логарифмического отображения Гаусса равна нормированному объему многогранника Ньютона для $Q(z)$[19]:

$$\deg \gamma = n! \cdot \operatorname{vol}(\mathcal{N}_Q).$$

Если при этом V – гиперповерхность общего положения (гладкая в подходящей торической компактификации $X \supset \mathbb{T}^n$), то степень $\deg \gamma$ равна числу прообразов $\# \gamma^{-1}(q)$ точек $q \in \mathbb{CP}_{n-1}$ общего положения (в них система (1.2) не имеет корней в $X \setminus \mathbb{T}^n$, а все корни в $\mathbb{T}^n$ простые).

[19] Mikhalkin G. Ann. Math. **151** (2000), 309–326.

Структура контура амебы может быть довольно сложной: содержать внутреннюю часть, точки контура могут иметь различное число прообразов. Введем понятие простоты для участка контура, являющегося границей связной E компоненты дополнения $\mathcal{G} \setminus \mathcal{A}_V$.

Конусом компоненты E с гладкой границей ∂E назовем конус K_E, порожденный внешними нормалями к ∂E. Иными словами, K_E – это образ ∂E при обычном отображении Гаусса $\sigma : \partial E \to S^{n-1}$.

Определение 1.2. Гладкую границу ∂E связной компоненты E назовем *простой*, если для каждого $x \in \partial E$ вещественный тор $\mathrm{Log}^{-1}(x)$ пересекает V в единственной точке z_x, причем логарифмическое отображение Гаусса γ гиперповерхности V локально обратимо в этой точке.

В виду выпуклости и гладкости ∂E каждая точка $x \in \partial E$ представляется прообразом $x = \sigma^{-1}(q)$ обычного отображения Гаусса.

Рассмотрим разложение мероморфной функции в ряд Лорана (1.1), сходящийся в прообразе $\mathrm{Log}^{-1}(E)$ компоненты E.

Теорема 1.2. *Пусть граница ∂E простая. Тогда для любого $q \in \mathbb{Z}^n_* \cap K_E$ диагональная последовательность $\{c_{q\cdot k}\}$ имеет при $k \to +\infty$ асимптотику вида*

$$c_{q\cdot k} = k^{\frac{1-n}{2}} \cdot z^{-q\cdot k}(q) \cdot \left\{C(q) + O(k^{-1})\right\}, \qquad (1.4)$$

где $z(q) = V \cap \mathrm{Log}^{-1}(\sigma^{-1}(q))$, а константа $C(q)$ обращается в нуль лишь в случае, когда $P(z(q)) = 0$.

Во **второй главе** изучается вопрос об алгебраичности производящих функций для диагональных последовательностей лорановских коэффициентов рациональной функции многих переменных.

При рассмотрении степенного ряда одним из основных вопросов является вопрос принадлежности суммы этого ряда некоторому классу функций (рациональных, алгебраических, D-конечных). Критерии алгебраичности степенных рядов, в частности, диагоналей рядов Тейлора, могут быть найдены в работе Сафонова[20]. Изучению принадлежности диаго-

[20] Safonov K.V., J. of Math. Anal. and Appl. **243**:3 (2000), 261-277.

налей рядов Тейлора рациональных и алгебраических функций так называемому классу D-финитных функций посвящены работы Денефа и Липшица. Отдельный интерес представляют диагонали степенных рядов над полями конечной характеристики (см. цитированные ранее статьи Фурштенберга и Денефа-Липшица).

Пусть дана рациональная функция n переменных

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_1, \ldots, z_n)}{Q(z_1, \ldots, z_n)},$$

где P и Q - несократимые полиномы. Рассмотрим произвольный ряд Лорана для F с центром в нуле:

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} {z_1}^{\alpha_1} \cdots {z_n}^{\alpha_n}. \tag{2.2}$$

В $\mathbb{Z}^n_*$ зафиксируем направление q, которое определяет две диагональные подпоследовательности $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$ и $\{c_{l \cdot q}\}_{l \in \mathbb{Z}_-}$ кратной последовательности $\{c_\alpha\}$ (для определенности полагаем, что $\mathbb{Z}_+$ – это множество неотрицательных целых чисел, а $\mathbb{Z}_-$ – множество отрицательных целых чисел).

Производящие функции

$$d_q^\pm(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_\pm} c_{l \cdot q} t^l \tag{2.3}$$

указанных подпоследовательностей назовем *односторонними q-диагоналями ряда* (2.2). Соответственно, сумму $d_q^+ + d_q^-$ назовем *полной q-диагональю.*

Вначале детально изучается случай рациональной функции двух переменных:

$$F(z_1, z_2) = \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)}.$$

Рассмотрим ее произвольный ряд Лорана с центром в нуле:

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1 \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}. \tag{2.6}$$

В предположении несократимости дроби $\frac{P}{Q}$ этот ряд сходится в некоторой области $Log^{-1}(E)$, соответствующей компоненте E из дополнения $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{A}_V$.

Теорема 2.1. *Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2_*$ полная диагональ*

$$d_q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kq_1,kq_2} t^k$$

всякого ряда Лорана (2.6) является алгебраической функцией.

Теорема 2.2. *Для любого $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2_*$ односторонняя диагональ ряда Лорана (2.6), связанного с неограниченной компонентой E, является алгебраической функцией.*

Утверждение последней теоремы неверно для рядов, соответствующих ограниченным компонентам E. Рассмотрим, например, рациональную функцию двух переменных

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{z_1^2 z_2 - 4z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + 1}.$$

На единичном остове $|z_1| = |z_2| = 1$ модуль монома $4z_1z_2$ больше суммы модулей трех остальных мономов, поэтому точка $(0,\ 0) = (\log 1, \log 1)$ не принадлежит амебе полинома Q, более того, она лежит в компоненте с порядком $\nu = (1, 1)$. Так как точка $(1, 1)$ – внутренняя точка многогранника Ньютона $\mathcal{N}_Q$, то $E = E_{1,1}$ – ограниченная компонета.

Разложение Лорана для $1/Q(z)$ в $Log^{-1}(E_{1,1})$ следующее:

$$-\frac{1}{4z_1z_2} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2}{4z_1 z_2} \right)^k =$$

$$= -\frac{1}{4z_1z_2} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{N}^2} \frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \frac{(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^{k_1}}{(4z_1 z_2)^{k_1 + k_2}} =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} c_{\alpha_1, \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2},$$

где

$$c_{\alpha_1,\alpha_2} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^2:\\ k_1-2k_2=\alpha_1+\alpha_2+2}} \frac{1}{4^{k_1+k_2+1}} \begin{pmatrix} k_1+k_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2+k_2+1 \\ k_1 \end{pmatrix}.$$

Диагонали $d^{\pm}_{(1,1)}(t)$ представленного разложения Лорана не являются алгебраическими.

Заметим, что Теоремы 2.1 и 2.2 не остаются справедливыми уже при $n=3$. Так диагональ

$$d_{(1,1,1)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)!}{(k!)^3} t^k$$

ряда Тейлора для функции

$$\frac{1}{1-z_1-z_2-z_3}$$

не является алгебраической[21].

Введем важный класс диагоналей, для которого Теорема 2.1 обобщается на случай нескольких переменных. Рассмотрим для ряда Лорана (2.2) следующую $(n-1)$-мерную диагональ

$$I_{12} = \sum_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^{n-1}} c_{\alpha_2,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \ldots t_n^{\alpha_n}. \qquad (2.11)$$

Ранее[22] такие диагонали рассматривались для степенных рядов по положительным степеням и были названы примитивными. По аналогии назовем (2.11) *полной примитивной* диагональю ряда Лорана (2.2).

Заметим, что полная $(1,\ldots,1)$-диагональ является композицией примитивных, например, при $n=3$

$$d_{(1,1,1)}(t) = I_{23}(I_{12}(F)).$$

Поэтому в указанном смысле следующая теорема дает обобщение Теоремы 2.1 на многомерный случай.

[21] Furstenberg H. Op. cit.
[22] Denef J., Lipshitz L. Op. cit.

Теорема 2.3. *Полная примитивная диагональ (2.11) ряда Лорана (2.2), связанная с компонентой E, является алгебраической функцией.*

Третья глава посвящена применению диагональных последовательностей к задачам статистической физики. Мы рассматриваем *термодинамический ансамбль*[23] $\mathfrak{U}$, состоящий из N идентичных слабовзаимодействующих систем. В классическом случае энергия каждой системы может принимать одно из проквантованных значений

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots, \ \varepsilon_j \in \mathbb{Z}.$$

Каждый выбор энергий из всего спектра $\{0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\}$ характеризует состояние ансамбля. Будем полагать, что суммарная энергия $\mathcal{E}$ ансамбля постоянна. При изучении поведения ансамбля основным является вопрос об отыскании распределения систем ансамбля по состояниям, в которых он может находиться.

Вообще говоря, состояния ансамбля можно классифицировать различными способами. Так можно рассматривать задачу нахождения наиболее вероятного состояния ансамбля при $N >> 1$. Дарвин и Фаулер[24] предложили другой метод по описанию распределений энергий, основанный на асимптотическом описании средних значений для распределений. Отметим, что работы Дарвина и Фаулера сыграли большую роль в части внедрения в математическую физику метода стационарной фазы.

Основная цель третьей главы состоит в распространении результата Дарвина-Фаулера на случай, когда система ансамбля характеризуется n-мерным параметром $\varepsilon_k = (\varepsilon_k^1, \ldots, \varepsilon_k^n)$ из заданного спектра. В этом случае статистическая сумма (сумма по состояниям) ансамбля есть ряд

$$Z(z, \varepsilon) = \sum_k z^{\varepsilon_k}, \tag{3.5}$$

а основные соотношения термодинамики приобретают вид

$$u_j = z_j \frac{Z'_{z_j}}{Z}, \ j = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

[23] Shrödinger E., *Statistical thermodynamics*, Cambridge, 1948.
[24] Darwin C.G., Fowler R.H. Op. cit.

и

$$a_k = N\frac{z^{\varepsilon_k}}{Z}, \tag{3.7}$$

где $u = (u_1, \dots, u_n) = \mathcal{E}/N$ – средняя энергия ансамбля, а a_k – число систем ансамбля $\mathfrak{U}$ со спектральным значением ε_k. Эти соотношения трактуются так: наиболее вероятные значения a_k выражаются при $N >> 1$ формулой (3.7), где z является решением из $\mathbb{R}^n_+$ системы (3.6).

Рассмотрим задачу об асимптотическом поведении средних значений $\overline{a_k}$ для чисел заполнения a_k при фиксированных отношениях $u = \mathcal{E}/N$. В случае, когда $V = \Gamma_Z$ – график статистической функции $w = Z(z_1, \dots, z_n)$, критические точки для $\mathrm{Log}|_V$ определяются поднятием на график V решения $z = z(u)$ системы уравнений (3.6) для $u \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}_n \subset \mathbb{CP}_n$. На амебе графика Γ_Z такие решения параметризуют контур амебы. С помощью Теоремы 1.2 доказывается

Теорема 3.1. *Пусть спектр $S = \{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$, и точка $z = z(u) \in \mathbb{R}^n_+$ удовлетворяет системе (3.6). Тогда при $N \to \infty$ средние значения $\overline{a}_k$ для чисел заполнения энергии ε_k имеют вид*

$$\overline{a}_k \sim N\,\frac{z^{\varepsilon_k}}{Z}\bigg|_{z=z(u)}$$

и совпадают с наиболее вероятными значениями a_k.

Вопрос о допустимых средних значениях энергий u, т.е. обеспечивающих существование решения $z(u) \in \mathbb{R}^n_+$ для системы (3.6), решается следующей теоремой, где через $\mathcal{N}^\circ$ обозначена внутренность выпуклой оболочки в $\mathbb{R}^n$ спектра $S = \{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{N}^n$.

Теорема 3.2. *Пусть спектр $S = \{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$. Тогда для всякого $u \in \mathcal{N}^\circ$ система (3.6) имеет в $\mathbb{R}^n_+$ единственное решение $z = z(u)$, и для таких u средние значения $\overline{a_k}$ совпадают с наиболее вероятными.*

Важную роль в доказательстве этого результата играет Теорема 1.1.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Августу Карловичу Циху за постановку задачи и внимание к работе.

Основные результаты

1) Найдена асимптотика коэффициентов Лорана мероморфных функций многих переменных в терминах контура амебы гиперповерхности полюсов.

2) Доказано, что полная диагональ ряда Лорана рациональной функции n переменных является алгебраической функцией. В случае $n = 2$ доказана алгебраичность односторонней диагонали, если ряд сходится в неограниченной области.

3) Получено обобщение метода Дарвина-Фаулера на случай многопараметрического спектра:

а) доказано, что в термодинамическом пределе средние значения чисел заполнения энергий совпадают с наиболее вероятными;

б) найдена область допустимых значений средней энергии для существования термодинамического предела.

Работы автора по теме диссертации

1. Почекутов Д.Ю., *Диагонали рядов Лорана рациональных функций*, Сиб. матем. журн. **50**:6 (2009), 1370–1383.

2. Почекутов Д.Ю., Цих А.К. *Асимптотика коэффициентов Лорана и ее применение в статистической механике*, Журн. СФУ Сер. Матем. и физ. **2**:4 (2009), 483–493.

3. Pochekutov D., *Asymptotics of coefficients for Laurent series of multivariate rational functions.* Тезисы Международной конференции “Аналитические функции многих комплексных переменных”. Красноярск. 2009, 29–30.

4. Почекутов Д.Ю., *Диагонали рядов Лорана рациональных функций.* Материалы XLV Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосиб. гос. университет. Новосибирск. 2007, 194–195.

Формат _________ Усл. изд. л. ________
Печать офсетная Усл. печ. л. ________
Тираж 100 экз. Заказ № ___________
Подписано в печать ___.___.2010 г.
Издательский центр СибФУ
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.