

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной и
исследовательской деятельности
федерального государственного
автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Южный федеральный университет»
доктор химических наук, доцент

А.В. Метелица



мая 2018 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования

«Южный федеральный университет»

о диссертации Пейчевой Анастасии Сергеевны

«О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными
смешанными задачами для эллиптических систем»,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации Пейчевой Анастасии Сергеевны «О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем» изучаются субэллиптические смешанные краевые задачи для одного класса линейных матричных сильно эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в областях с липшицевой границей. Автор исследует операторные уравнения в подходящих функциональных пространствах соболевского типа, в том числе - весовых, а также применяет полученные им результаты для изучения разрешимости некорректной задачи Коши для эллиптических систем и для построения формулы Карлемана для ее решения.

Как хорошо известно из классических работ М. Вишика, Ф. Браудера, Ж. Л. Лионса и др. краевые задачи для сильно линейных эллиптических операторов естественно исследовать методом эрмитовых форм, привлекая понятие обобщенного решения. На этом пути во второй половине прошлого столетия естественно появился класс фредгольмовых задач, удовлетворяющих условиям Шапиро-Лопатинского, принадлежность которому

означает разрешимость уравнения с максимально возможной регулярностью (гладкость решения повышается на порядок оператора по сравнению с гладкостью внутренних данных). Позднее, в работах Дж. Кона, С. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга были выявлены естественные задачи, для которых условия Шапиро-Лопатинского нарушены, однако проявляется эффект субэллиптичности, когда внутренняя регулярность решений все еще максимальна, но гладкость вблизи границы области рассмотрения решений существенно снижается. Модельной задачей такого типа является $\bar{\partial}$ -задача Неймана для комплекса Дольбо в псевдовыпуклых областях с гладкой границей, субэллиптичность которой на шкале пространств Соболева была доказана Дж. Коном в 1979 году. В недавних работах А.Н. Полковникова и А. А. Шлапунова (2013), Н. Н. Тарханова, А. А. Шлапунова (2013-2015) подобные результаты были получены для смешанных задач для скалярных дифференциальных операторов второго порядка с комплекснозначными коэффициентами без геометрических условий на области в контексте обычных и весовых пространств соболевского типа. Более точно, ими был указан один класс граничных операторов, которые не удовлетворяют, вообще говоря, условиям Шапиро-Лопатинского, но сохраняют эффект субэллиптичности с потерей гладкости равной единице. Ключевым для этого подхода является теорема вложения в шкалу (весовых) пространств Соболева-Слободецкого для пространств, где ищется решение, с помощью которой получается фредгольмовость исследуемых краевых задач.

Для перехода от скалярных операторов к матричным, диссертант рассматривает обобщенный лапласиан A^*A , ассоциированный с (переопределенным) матричным эллиптическим оператором A , и его подходящие возмущения (здесь A^* – формально сопряженный дифференциальный оператор для A). Центральным результатом диссертационной работы является теорема вложения для пространств, порожденных некоэрцитивными (субэллиптическими) эрмитовыми формами, ассоциированными с обобщенным лапласианом, в шкалу (весовых) пространств Соболева-Слободецкого. Эта теорема позволила соискателю описать условия фредгольмовости и непрерывной разрешимости одного достаточного широкого класса смешанных задач. Большинство результатов диссертации так или иначе опираются на полученную теорему вложения.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приводится обзор темы диссертации, история рассматриваемых задач, приводится краткое описание основных результатов диссертации и ее структуры.

В первой главе приводятся основные определения и доказывается основной результат диссертации – теорема вложения для пространств, порожденных некоэрцитивными (субэллиптическими) эрмитовыми формами, ассоциированными с обобщенным лапласианом, в шкалу стандартных пространств Соболева-Слободецкого над областями с гладкими границами. В этой главе также отмечены непосредственные следствия из теоремы

вложения применительно к спектральной теории смешанных задач. При этом использованы такие стандартные инструменты функционального анализа как теорема Гильберта-Шмидта, классы Шаттена, теорема Келдыша о слабом возмущении компактных самосопряженных операторов и метод лучей медленного роста резольвенты. Кроме в этой главе рассмотрена некорректная задача Коши для квадратных эллиптических систем, решения которых обладают свойством единственности в малом. Полученная автором теорема вложения позволяет усилить результаты Н. Тарханова, А. А. Шлапунова (2005) относительно регуляризационных формул для такой задачи Коши.

В главе 2 теорема вложения адаптирована к весовым пространствам Соболева-Слободецкого. Как следствие, автором получены достаточные условия фредгольмовости и непрерывной обратимости трех задач типа Штурма-Лиувилля для (эллиптического) оператора типа Ламе в этих весовых пространствах. Доказывается, что две из них удовлетворяют условиям Шапиро-Лопатинского, а третья является субэллиптической (некоэрцитивной). Приведены также соответствующие утверждения из спектральной теории, адаптированные к изложению в весовых пространствах. Кроме того, в этой главе рассмотрены несколько поясняющих примеров. В частности, показано, что теорема вложения неулучшаема для выбранного класса смешанных задач.

Глава 3 посвящена нахождению спектра комплексной задачи Зарембы в единичном круге на комплексной плоскости. В ней получен критерий того, чтобы комплексное число было собственным значением исследуемой задачи. Кроме того, найдено разложение собственных векторов задачи в ряд по функциям Бесселя. Показано, что в случае когда множества, где заданы данные Дирихле и Неймана, не являются пустыми, разложение в ряд по функциям Бесселя обязательно содержит бесконечно много слагаемых. Полученные формулы, однако, не носят практический характер из-за своей сложности.

Изложение материала в диссертации соответствует требованиям, предъявляемым к математическим текстам: все выносимые на защиту основные результаты снабжены достаточно полными и строгими доказательствами, все используемые в тексте результаты других авторов снабжены ссылками на цитируемые источники. Текст диссертации написан достаточно четким математическим языком и имеет аккуратное оформление.

Результаты диссертационной работы являются новыми, полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации докладывались автором на международных конференциях и научных семинарах. Диссертация носит теоретический характер.

Результаты диссертационной работы могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Южном федеральном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова, в Санкт-Петербургском

отделении Математического института им. В. А. Стеклова, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и др. учреждениях, а также в специальных курсах для студентов-математиков.

Диссертация А.С. Пейчевой «О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем» содержит решения задач, имеющих важное значение в теории функциональных пространств и их приложения при изучении операторов, соответствующих смешанным краевым задачам для эллиптических уравнений в частных производных, и удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней». Автор диссертации Анастасия Сергеевна Пейчева заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук (специальность – 01.01.01), профессором кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета Алексеем Николаевичем Карапетянцем (344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а. Тел. 8(863) 297-51-17, e-mail: karapetyants@sfedu.ru).

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, протокол №9 от 10 мая 2018 года.

Заведующий кафедрой дифференциальных
и интегральных уравнений Института
математики, механики и компьютерных наук
Южного федерального университета,
доктор физико-математических наук, доцент

Авсянкин
Олег Геннадиевич



Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
личную подпись Авсянкин О.Г.

ЗАВЕРЯЮ:

Специалист по работе с персоналом
I категории М.П. Поддубинская М.П.
« 16 » мая 20 18 г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» г. Ростов-на-Дону, ул. Б.Садовая д.105/42, 344006. Тел.: +7(8634)680-890; факс 263-87-23; e-mail: info@sfedu.ru; www.sfedu.ru