ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Зотов Игорь Николаевич

Соответствие Мальцева и локальные автоморфизмы нильтреугольных алгебр классических типов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, профессор

Левчук Владимир Михайлович

Красноярск – 2021

Содержание

Введение **3**

Глава 1. Соответствие Мальцева и изоморфизмы **8**

1.1 Некоторые теоретико-модельные сведения и соответствие Мальцева 9

1.2 Постановка основных задач 12

1.3 Теоремы об изоморфизмах и соответствии Мальцева . . 16

Глава 2. Доказательство теорем 1.3.1 и 1.3.2 **18**

2.1 Специальное представление нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов 18

2.2 Центральные ряды и автоморфизмы 20

2.3 Основная теорема об изоморфизмах 24

2.4 Теорема о соответствии Мальцева 28

Глава 3. Локальные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов **31**

3.1 Группа локальных автоморфизмов 31

3.2 Примеры нетривиальных локальных автоморфизмов . . 34

3.3 Редукция локальных автоморфизмов 38

Список литературы **48**

Наиболее употребительные обозначения **57**

Введение

Согласно А.И. Мальцеву [1], при $n \geq 3$ и $G = GL$, PGL, SL или PSL элементарная эквивалентность $\equiv$ языка 1-го порядка групп $G_n(K)$ и $G_n(S)$ над полями K и S нулевой характеристики переносится на поля коэффициентов:

$$G_n(K) \equiv G_n(S) \to K \equiv S.$$

Установленное соответствие называют соответствием Мальцева, см. Ю.Л. Ершов [3] и обзоры В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков [4].

К.И. Бейдар и А.В. Михалев [2] перенесли теорему Мальцева на случай, когда K и S – первичные ассоциативные кольца с $1/2$.

Вопросы зависимости элементарной эквивалентности и других модельных свойств развивались с 70-х годов в тесной связи с теорией изоморфизмов, см. Е.И. Бунина, А.В. Михалев [5] и [6], а для групп Шевалле также Е.И. Бунина [7], [8].

Б. Роуз [9] и В. Велер [10] исследовали соответствие Мальцева для колец $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц (т.е. с нулями на главной диагонали и над ней) над полями.

В работах [11], [12] и [13] описаны изоморфизмы кольца $R = NT(n, K)$ над любым ассоциативным кольцом K с единицей, ассоциированного кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы (она изоморфна унитреугольной группе $UT(n, K)$). Это позволило перенести соответ-

ствие Мальцева на кольца R (К. Видэла, [14]), а при условии коммутативности кольца K – на группы $UT(n, K)$ (О.В. Белеградек, [15]) и на кольца Ли $R^{(-)}$ [16]. Оказалось, в общем случае соответствие Мальцева здесь не выполняется. Поэтому для перенесения теоремы Мальцева в [16] использовалось понятие обобщенного изоморфизма колец. См. § 1.1.

На унипотентные подгруппы групп Шевалле $U\Phi(K)$ над полями характеристики $\neq 2, 3$ соответствие Мальцева перенес К. Видэла [17] в 1990 году. Естественно возникают вопросы, которые В.М. Левчук записал в 2012 году в обзоре [18]. Из них выделяют

(A) Исследовать зависимость элементарной эквивалентности нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ от свойств колец коэффициентов.

С учетом теоремы Кейслера-Шелаха [19, Теорема 6.1.15] , связанным с вопросом **(A)** является вопрос:

(A′) Исследовать изоморфность $N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S)$ для систем корней Φ и Φ' и колец K, S.

Решению вопросов **(A)** и **(A′)** посвящены первые две главы диссертации. Основными результатами здесь являются теорема 1.3.1 и главная теорема 1.3.2 о соответствии Мальцева, опубликованные в [52].

Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования алгебр систематически изучаются с 90-х годов. В параграфе § 3.1 доказано, что локальные автоморфизмы произвольной алгебры образуют группу относительно композиции (предложение 3.1.3).

Один из первых примеров алгебры с нетривиальным локальным автоморфизмов (определение 3.1.2) указал в 2000 году R. Crist [20] в определенной подалгебре в $M(3, \mathbb{C})$ треугольных матриц.

Новые примеры нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(n, K)$ $(n > 3)$ (опубликовано в [51] с соавторами в нераздельном соавторстве) и их финитарных обобщений выявляет в § 3.2 теорема 3.2.1.

Редукционный метод исследования локальных автоморфизмов алгебры $N\Phi(K)$ разрабатывает теорема 3.3.1, опубликованная автором в [53].

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 63 наименования.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [51]-[63]. Публикации [51], [52] и [53] входят в издания из перечня ВАК.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер.

Результаты диссертационной работы докладывались на заседаниях Красноярского алгебраического семинара (2016-2021 гг.), на научно исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры ММФ МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 12 декабря 2016 г.) и апробировались на конференциях:

1) XLII краевая научная студенческая конференция по математике (Красноярск, 3 апреля 2009 г.).

2) Международная конференция «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 19-25 июля 2010 г.).

3) VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященная 155-летию со дня рождения К.Э. Циолковского «Молодёжь и наука» (Красноярск, 30 марта 2012 г.).

4) Международная XI школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию со дня рождения А.Ю. Ольшанского (Красноярск, 27 июля – 6 августа 2016 г.).

5-7) Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 21-24 ноября 2016 г., 19-23 августа 2019 г., 16-20 ноября 2020 г.).

8) 5-я Российская школа-семинар «Синтаксис и семантика логических систем» (Улан-Удэ, 8-12 августа 2017 г.).

9) Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Проспект Свободный – 2018», посвященная году гражданской активности и волонтёрства в РФ (Красноярск, 23-27 апреля 2018 г.).

10) Всероссийская конференция по математике и механике с международным участием в связи с 70-летием ММФ ТГУ (Томск, 2-4 октября 2018 г.).

11) Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-

летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша (Москва, 23-25 мая 2018 г.).

12) 14-я международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры», посвященная 75-летию профессора Б. Пуаза (Эрлагор, 23-29 июня 2021 г.).

Автор благодарен научному руководителю профессору Левчуку Владимиру Михайловичу за постановку задач и внимание к работе. Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и Института математики и фундаментальной информатики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта: 16-01-00707) и Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1388).

Глава 1. Соответствие Мальцева и изоморфизмы

В главе 1 приводятся необходимые для дальнейшего теоретико-модельные сведения и определяется соответствие Мальцева для линейных групп и колец. Выделяются нильтреугольные подалгебры $N\Phi(K)$ в алгебрах Шевалле и ассоциированные с ними унипотентные подгруппы $U\Phi(K)$ групп Шевалле.

В § 1.2 приведена известная, главная в диссертации задача о соответствии Мальцева для нильтреугольных колец Ли $N\Phi(K)$ над произвольными ассоциативно коммутативными кольцами с единицей (задача $\mathbf{A}$) и связанная задача об изоморфизмах $N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S)$ (задача $\mathbf{A}'$). Исследование локальных автоморфизмов алгебр является относительно молодым направлением. Наряду с разработкой редукционных методов их исследования, интерес представляют новые примеры нетривиальных локальных автоморфизмов.

Основные теоремы 1.3.1 и 1.3.2 о соответствии Мальцева и изоморфизмах сформулированы в § 1.3.

1.1 Некоторые теоретико-модельные сведения и соответствие Мальцева

Алгебраической системой называют объект

$$\mathfrak{A} = \langle A, \Omega_F, \Omega_P \rangle,$$

состоящий из непустого множества A, множества операций $\Omega_F = \{F_0, \ldots, F_\xi, \ldots\}$, определенных на множестве A, и множества предикатов $\Omega_P = \{P_0, \ldots, P_\eta, \ldots\}$, заданных на множестве A. Множество A называют *носителем* или *основным множеством* системы $\mathfrak{A}$, а его элементы – элементами системы $\mathfrak{A}$.

В отличие от других операций и предикатов, которые могут быть определены на множестве A, операции F_ξ и предикаты P_η называются *основными* или *главными.* Значения главных нульарных операций системы называют *главными* или *выделенными элементами этой системы.*

Объединяя множества Ω_F и Ω_P системы $\mathfrak{A}$ и полагая $\Omega = \Omega_F \bigcup \Omega_P$, мы сможем записать систему более кратко: $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$. Множество Ω называют *сигнатурой* системы $\mathfrak{A}$ и говорят, что $\mathfrak{A}$ есть $\Omega-$система.

Алгебраическую систему, получаемую из $\mathfrak{A}$ добавлением в сигнатуру набора $\overline{a}$ новых выделенных элементов $a_1, \ldots, a_s$ обозначают через $(\mathfrak{A}, \overline{a}) = (\mathfrak{A}, a_1, \ldots, a_s)$.

Определение 1.1.1. *Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ фиксированной сигнатуры Ω называются элементарно эквивалентными (симво-*

лически $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если каждая закрытая формула 1-й ступени сигнатуры Ω, истинная на одной из заданных систем, истинна и на другой.

Легко показать, что любые две изоморфные системы элементарно эквивалентны; для конечных систем верно и обратное. С другой стороны, поле комплексных $\mathbb{C}$ чисел элементарно эквивалентно полю алгебраических чисел $\bar{\mathbb{Q}}$, однако, эти поля даже неравномощны и, следовательно, не изоморфны, [19].

Зависимость элементарной эквивалентности и других модельных свойств линейных групп от свойств полей или колец коэффициентов изучал А.И. Мальцев. Соответствие между элементарными свойствами унитреугольной группы $UT(3, K)$ степени 3 с выделенными параметрами и кольца коэффициентов K с единицей 1_K (не обязательно ассоциативного) установлено в статье [21].

Согласно [1], элементарная эквивалентность групп $G_n(K)$ и $G_n(S)$ ($n \geq 3$) над полями K и S нулевой характеристики при $G = GL$, PGL, SL или PSL переносится на поля коэффициентов. Установленное соответствие

$$G_n(K) \equiv G_n(S) \to K \equiv S$$

называют соответствием Мальцева.

Б. Роуз [9] и В. Велер [10] исследовали соответствие Мальцева для колец $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц (т.е. с нулями на главной диагонали и над ней) над полями.

К.И. Бейдар и А.В. Михалев [2] переносят теорему Мальцева на случай, когда K и S – первичные ассоциативные кольца с $1/2$. См. Ю.Л. Ершов [3] и обзор В.Н. Ремесленникова, В.А. Романькова [4].

Исследования теоретико-модельных свойств линейных групп и колец развивались с 70-х годов в тесной связи с теорией изоморфизмов. В [22], [23] и монографии Кейслера–Чэна [19] связь отражает

Теорема об изоморфизме. *Алгебраические системы* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их изоморфные ультрастепени.*

О.В. Белеградек [15] установил соответствие Мальцева для групп $UT(n, K)$ $(n > 3)$ над коммутативными кольцами коэффициентов.

В работах [11], [12] и [13] описаны автоморфизмы и изоморфизмы колец $NT(n, K)$ над произвольными ассоциативными кольцами с единицей и, вместе с тем, ассоциированных колец Ли $\Lambda(NT(n, K))$ и присоединенных групп (они изоморфны унитреугольным группам $UT(n, K)$), $n \geq 3$. Это позволило К. Видэла в 1988 г. [14] установить соответствие Мальцева для колец $NT(n, K)$.

Зависимость элементарных эквивалентностей

$$UT(n, K) \equiv UT(n, S), \qquad \Lambda(NT(n, K)) \equiv \Lambda(NT(n, S))$$

от элементарных свойств колец коэффициентов исследовали В.М. Левчук и Е.В. Минакова, [16] и [24]. Оказалось, что в общем случае соответствие Мальцева не выполняется.

В [16], [24] теорема Мальцева обобщается с помощью обобщения понятия изоморфности. Изоморфизм $\theta : K^+ \to S^+$ аддитивных групп с условием $\theta(1_K) = 1_S$, называем f-изоморфизмом для центрального идемпотента f $(= f^2)$ кольца K или *идемпотентным изоморфизмом* колец K и S, если он индуцирует изоморфизм идеала fK и анти-изоморфизм идеала $(1_K - f)K$. Кольца K и S тогда называем *идемпотентно изоморфными.* В [16], [24] доказана

Теорема. Пусть K, S – ассоциативные кольца с единицами, $R = NT(n, K)$, $R' = NT(n, S)$ и $n > 4$. Тогда любая из изоморфностей

$$UT(n, K) \simeq UT(n, S), \quad \Lambda(R) \simeq \Lambda(R')$$

равносильна тому, что кольца K и S идемпотентно изоморфны. Любая из элементарных эквивалентностей

$$UT(n, K) \equiv UT(n, S), \quad \Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$$

равносильна существованию центральных идемпотентов f в K и g в S таких, что

$$fK \equiv gS, \quad (1 - f)K \equiv [(1 - g)S]^{op}.$$

1.2 Постановка основных задач

Естественное обобщение классических линейных групп дают группы Шевалле, имеющие единообразные методы исследования.

Комплексную алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(\mathbb{C})$ характеризуют неразложимой системой корней Φ евклидова пространства и базой Шевалле

$$\{e_r \ (r \in \Phi), \quad h_s \ (s \in \Pi)\},$$

где Π – система простых корней или база в Φ, [25]. Структурные константы базы Шевалле целочисленные. Более точно, имеем:

$$e_r * e_{-r} = h_r, \quad h_s * h_r = 0, \quad h_s * e_r = \frac{2(r,s)}{(r,r)} \ e_r;$$

$$e_r * e_s = 0 \ \ (r + s \notin \Phi \cup \{0\}), \quad e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r + s \in \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$, или $|r| = |s| < |r + s|$ и $N_{rs} = \pm 2$, или (тип G_2) $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3. Система положительных корней $\Phi^+ \supseteq \Pi$ в Φ единственна.

Переходом от поля $\mathbb{C}$ к произвольному полю или даже ассоциативно коммутативному кольцу K получают алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$. Подалгебру с базой e_r $(r \in \Phi^+)$ называют *нильтреугольной* и обозначают через $N\Phi(K)$.

Известно, что для любого корня r отображение

$$t \to x_r(t) := exp \ (t \cdot ad \ e_r) \quad (t \in K)$$

дает изоморфизм аддитивной группы поля K в группу автоморфизмов $Aut \ \mathcal{L}_\Phi(K)$. *Группу Шевалле* $\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$. Её унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы X_r $(r \in \Phi^+)$, [25].

Классические линейные группы соответствуют четырем типам A_n, B_n, C_n и D_n из девяти типов систем корней. (См. [26], а для присоеди-

ненных представлений – [25].) Для Φ типа A_{n-1} алгебру $N\Phi(K)$ представляет алгебра $NT(n,K)$, а группу $U\Phi(K)$ – унитреугольная группа $UT(n,K)$.

Е.И. Бунина, развивая методы работы [2] переносит соответствие Мальцева на группы Шевалле над полями и локальными кольцами с $1/2$ (для типа G_2 также с $1/3$), см. [27] и монографию [6].

В 2012 году В.М. Левчук в обзоре [18] отмечает, что естественно возникают *вопросы о модельных свойствах* различных групп Шевалле и их унипотентных подгрупп, алгебр Шевалле и подалгебр $N\Phi(K)$. Конкретно отмечается вопрос:

(A) Исследовать зависимость элементарной эквивалентности нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ от свойств колец коэффициентов.

На унипотентные подгруппы групп Шевалле $U\Phi(K)$ над полями характеристики $\neq 2,3$ соответствие Мальцева перенес К. Видэла [17] в 1990 году. С учетом теоремы Кейслера(1961 г.)-Шелаха(1972 г.), связанным с вопросом **(A)** является вопрос:

(A′) Исследовать $N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S)$ для систем корней Φ и Φ' и колец K, S.

Далее нам потребуется

Определение 1.2.1. *Локальным автоморфизмом* произвольной K-алгебры A называют автоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент $\alpha \in A$ как некоторый автоморфизм алгебры A, вообще

говоря, зависящий от выбора α.

Аналогично определяют локальные дифференцирования, см. § 3.1. Автоморфизмы называют *тривиальными* локальными автоморфизмами. Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования алгебр систематически изучаются с 90-х годов.

Согласно [28], дифференцирования любого кольца R образуют подкольцо $Der\ R$ в кольце Ли, ассоциированном с кольцом $End\ (R,+)$ эндоморфизмов аддитивной группы $(R,+)$ кольца R.

Легко видеть, что локальные дифференцирования кольца R образуют аддитивную подгруппу $Locder\ R$ кольца $End\ (R,+)$. (При $x \in R$ и $\phi, \psi \in Locder\ R$ можно полагать $(\phi+\psi)_x = \phi_x + \psi_x$.)

Для алгебры $R = NT(n,K)$ над произвольным ассоциативно коммутативным кольцом с единицей описание $Der\ R$ и $Der\ R^{(-)}$ исследовалось в [29], а для финитарных обобщений – в [30].

Локальные автоморфизмы алгебры $M(n,\mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ матриц исчерпываются автоморфизмами и антиавтоморфизмами, [45]. Р. Крист [20] построил один из первых примеров нетривиального локального автоморфизма подалгебры треугольных матриц в $M(3,\mathbb{C})$ с попарно совпадающими элементами каждой диагонали.

Примеры нетривиальных локальных автоморфизмов φ нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ приводились в [51]. В этих примерах локальный автоморфизм φ оказывался тривиальным по модулю центра Z_1.

Полное описание локальных автоморфизмов нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ известны только для типа A_n при $n = 2, 3$.

Подробнее рассмотрим тип A_{n-1}, полагая $R = NT(n, K)$. Степени R^j есть идеалы в R. В ассоциированной алгебре Ли $R^{(-)}$ верхний центральный или гиперцентральный ряд образуют идеалы

$$Z_j = R^{n+1-j} \quad (j = 1, 2, 3, ..., n).$$

Мы исследуем действие локальных автоморфизмов алгебр R и $R^{(-)}$ по модулю степеней R^j.

Разрабатывая редукционные методы для алгебр R и $R^{(-)}$, мы переносим их в главе 3 на алгебры $N\Phi(K)$ классических типов. Основные теоремы по вопросу **(A)** приведены в следующем параграфе.

1.3 Теоремы об изоморфизмах и соответствии Мальцева

Алгебра Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ и группа Шевалле $\Phi(K) \subseteq Aut\ \mathcal{L}_\Phi(K)$ определяются над любым ассоциативно коммутативным кольцом K с единицей. Кольцевой изоморфизм $\theta : K \to S$ всегда индуцирует изоморфизм колец Ли

$$\overline{\theta} : N\Phi(K) \to N\Phi(S)$$

по правилу $\overline{\theta}(xe_r) = \theta(x)e_r \quad (x \in K,\ r \in \Phi)$.

Биективное отображение $\tau : \Phi \to \Phi'$ систем корней называют их *эквивалентностью*, если существует вещественное число $\lambda > 0$ такое,

что $(\tau(r), \tau(s)) = \lambda \cdot (r, s) \quad (r, s \in \Phi)$. Ясно, что любая эквивалентность τ индуцирует изоморфизм $\overline{\tau}$ алгебр Ли по правилу

$$\bar{\tau}: \ N\Phi(K) \to N\Phi'(K), \quad e_r \to e_{\tau(r)} \quad (r \in \Phi^+).$$

Известно [25], что группы Шевалле $\Phi(K)$ (аналогично, унипотентные подгруппы $U\Phi(K)$) типов B_n и C_n над совершенным полем или кольцом K характеристики 2 изоморфны, а следовательно, и элементарно эквивалентны. Поэтому в основной теореме Е.И. Буниной в [31] на кольца коэффициентов накладываются ограничения обратимости двойки.

Оказывается, для лиевых колец $N\Phi(K)$ типов B_n и C_n ситуация существенно отличается и для классических типов вопросы **(A)** и **(A′)** удается решить в общем случае.

Пусть K и S – произвольные ассоциативно коммутативные кольца с единицами. Основной теоремой об изоморфизмах является

Теорема 1.3.1. *Пусть $N\Phi(K)$ – кольцо Ли классического типа D_n $(n \geq 4)$, B_n или C_n $(n > 4)$. Кольцо Ли $N\Phi'(S)$ изоморфно $N\Phi(K)$ тогда и только тогда, когда $S \simeq K$, а системы корней Φ' и Φ эквивалентны.*

Выберем кольцо Ли $N\Phi(K)$ как и в теореме 1.3.1. Соответствие Мальцева выявляет

Теорема 1.3.2. *Кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда $K \equiv S$, а системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

Глава 2. Доказательство теорем 1.3.1 и 1.3.2

2.1 Специальное представление нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов

Обычные матричные единицы e_{ij} $(1 \leq j < i \leq n)$ составляют базу алгебры $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K, а также базу Шевалле $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ e_r = e_{ij}\}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} после соответствующей нумерации корней $r = r_{ij}$.

Нам потребуется специальное представление из [32] алгебр $N\Phi(K)$ классического типа. Как и в [33, Таблицы I-IV], системы корней классического типа A_{n-1}, B_n, C_n и D_n выберем в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Положительные корни систем классических типов записываются в виде

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n,\ m \in \{0, -1, +1\}.$$

Сумма корней $p_{ij} + p_{kv}$ есть корень лишь когда $k = j$ или $v = i$ или (для типа $\neq A_n$) $v = -j$.

Полагая $e_r = e_{i,mj}$ при $r = p_{i,mj}$, произвольный элемент из $N\Phi(K)$ представляем суммой $\sum a_{iv} e_{iv}$ и Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ над K. В частности, B_n^+ и C_n^+- матрицы имеют вид, соответственно

$$a_{10}$$

$$a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21}$$

$$\dots\quad \dots\quad \dots$$

$$a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1},$$

$$a_{1,-1}$$

$$a_{2,-2}\ a_{2,-1}\ a_{21}$$

$$\dots\quad \dots\quad \dots$$

$$a_{n,-n}\ \dots\ a_{n,-2}\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}.$$

Отбрасывая в B_n^+-матрице нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу:

$$a_{2,-1}\ a_{21}$$

$$\dots\quad \dots\quad \dots$$

$$a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}.$$

Согласно [32, Лемма 2], справедлива

Лемма 2.1.1. *Знаки структурных констант базиса Шевалле алгебры Ли $N\Phi(K)$ можно выбрать так, что $[e_{ij}, e_{jv}] = e_{iv}$ и верны равенства:*

$$\Phi = B_n, D_n: \quad [e_{jv}, e_{i,-v}] = e_{i,-j} \quad (i > j > |v| > 0);$$

$$\Phi = C_n: \quad [e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{im}, e_{j,-m}] = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geq 1);$$

$$\Phi = B_n : \quad [e_{i0}, e_{j0}] = 2e_{i,-j} \quad (i > j);$$

$$\Phi = C_n : \quad [e_{ij}, e_{i,-j}] = 2e_{i,-i} \ (i > j \geq 1).$$

2.2 Центральные ряды и автоморфизмы

Очевидна

Лемма 2.2.1. *Пусть $\psi : R \to R'$ – изоморфизм произвольных колец R и R', $\pi \in Aut\ R$ и $\chi \in Aut\ R'$. Тогда $\pi\psi\chi$ есть также изоморфизм кольца R на R'.*

Как и в [35], мы используем известное обобщение центральных автоморфизмов, то есть тождественных по модулю центра. Автоморфизм группы или кольца Ли R, являющийся единичным по модулю m-го гиперцентра и внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра, называют *гиперцентральным высоты* m или, кратко, *гиперцентральным автоморфизмом,* когда R не совпадает с m-м гиперцентром.

Нам потребуются некоторые характеристические идеалы и автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$.

Гиперцентры $Z_j = Z_j(K)$, то есть члены гиперцентрального (или верхнего центрального) ряда и члены Γ_i нижнего центрального ряда кольца Ли $N\Phi(K)$, а также их централизаторы являются его характеристическими идеалами.

Высотой корня r называют сумму $ht(r)$ коэффициентов в разложении r по базе Π. Число Кокстера $h = h(\Phi)$ системы Φ равно $ht(\rho) + 1$ с

максимальным в Φ^+ корнем ρ. Идеалы L_m с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+,\ ht(r) \geq m\}$ образуют центральный ряд $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_h = 0$ в $N\Phi(K)$, называемый стандартным. Аналогично [35, Лемма 1], индукцией по $h - i$ доказывается формула $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}\ \ (1 \leq i \leq h)$. Поэтому справедлива

Лемма 2.2.2. *Верхний и нижний центральные ряды кольца Ли $N\Phi(K)$ при $p(\Phi)!K = K$ совпадают с её стандартным центральным рядом:* $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}\ \ (1 \leq i \leq h)$.

Отметим, что ограничение на кольцо K в лемме равносильно требованию $2K = K$, когда Φ типа B_n, C_n и F_4, и $6K = K$ для типа G_2. В остальных случаях все корни в Φ одной длины и, в силу леммы, все идеалы L_m кольца Ли $N\Phi(K)$ характеристические.

Стандартными автоморфизмами кольца Ли $N\Phi(K)$ считаем произведения кольцевых, внутренних (или из $U\Phi(K)$), диагональных и центральных автоморфизмов.

Выделим некоторые нестандартные автоморфизмы. Пусть $\Pi = \{q, r_1, r_2, r_3\}$ для типа D_4, где q – простой корень, неподвижный относительно всех симметрий графа Кокстера. Тогда, в силу [32], любой матрице $\beta = ||b_{uv}|| \in SL(3, K)$ с условиями $2b_{mj}b_{mi} = 0,\ 1 \leq i, j, m \leq 3,\ i \neq j$, соответствует автоморфизм $\widehat{\beta}$ алгебры $ND_4(K)$, определяемый действием

$$\widehat{\beta}:\ e_{r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im} e_{r_m}\ (i = 1, 2, 3), \quad e_q \to e_q. \tag{2.1}$$

Для простых симметричных корней r и $\bar{r} \neq r$ ($\bar{\bar{r}} = r$) системы корней Φ типа D_n ($n \geq 4$), согласно [36], определено изоморфное вложение $\widetilde{}$ подгруппы

$$S = \{\alpha = ||a_{uv}|| \in SL(2, K) \ : \ 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0\}$$

группы $SL(2, K)$ в группу автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$ по правилу

$$\widetilde{\alpha} : \quad e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}}, \quad e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}}, \quad e_s \to e_s \quad (s \in \Pi \setminus \{r, \bar{r}\}).$$

В матричном представлении алгебры $ND_n(K)$ он определяется правилом

$$\widetilde{\alpha} : \ e_{2,-1} \to a_{11}e_{2,-1} + a_{12}e_{21}, \quad e_{21} \to a_{21}e_{2,-1} + a_{22}e_{21},$$

$$e_{i+1i} \to e_{i+1i} \ (1 < i < n).$$

При обратимых $1 + t \in 1 + \mathcal{A}_2$ для типа B_n выделяем *полудиагональные* автоморфизмы

$$\delta_t^{(-1)} : \ e_{kv} \to (1 + t)e_{kv} \ (0 < -v < k \leq n), \quad e_{kv} \to e_{kv} \ (0 \leq v < k \leq n).$$

Автоморфизмы колец Ли $N\Phi(K)$ исследовались ранее [32], наряду с описаниями групп автоморфизмов $Aut\ U\Phi(K)$.

К. Видэла [17] использует нестандартный (extremal) автоморфизм Дж. Гиббса [37] группы $U\Phi(K)$ при $K = 6K$; аналогичный автоморфизм алгебр Ли $N\Phi(K)$ см. [38]. Согласно [35], эти автоморфизмы – гиперцентральные высоты 3 (тип C_n) или 2. См. также описание автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ при $K = 2K$ в [38].

Подгруппу автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$, которую порождают выделенные в [36] гиперцентральные автоморфизмы высоты > 1, обозначаем через $V(\Phi, K)$. Так, каждому элементу $t \in \mathcal{A}_2$ в [36] сопоставлены гиперцентральные автоморфизмы

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,-n+3} + a_{nn-2}e_{n-1,-n+3} + a_{nn-3}e_{n-1,-n+2}),$$

алгебр Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 5)$, $NB_n(K)$ и $NC_n(K)$ $(n \geq 4)$, а также

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1}e_{n-2,0} + a_{nn-2}e_{n-1,0}), \quad \chi_t : \alpha \to \alpha + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k,-1}te_{k0}$$

алгебры Ли $NB_n(K)$ $(n \geq 4)$ высоты ≤ 3 и $\leq n-1$, соответственно, по лемме 3.3.2. Описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ классических типов завершено в [36]. Его резюмирует

Теорема 2.2.3. *Всякий автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$, $n > 4$, есть произведение стандартного и гиперцентрального из $V(\Phi, K)$ автоморфизмов. Для кольца Ли $NB_n(K)$, $n > 4$, сомножителем добавляется полудиагональный автоморфизм, а для кольца Ли $ND_n(K)$ – автоморфизм из $\widetilde{S}$ при $n \geq 5$ или (2.1) при $n = 4$.*

Замечание 2.2.4. *Описание в [36] подгруппы $V(\Phi, K)$ для классических типов показывает, что идеал T_{10} кольца Ли $NB_n(K)$ характеристичен при $n > 4$, а в кольце Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ идеал T_{iv} при $i < n$ – характеристический. Идеалы $T_{nn-1}, T_{nn-2}, T_{nn-3}$ являются $V(\Phi, K)$-инвариантными по модулю $T_{n-2,-n+3}$ в кольцах Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 4)$ и $NC_n(K)$ $(n > 4)$, а по модулю $T_{n-2,-n+3} + T_{n-2,0}$ – в кольце $NB_n(K)$ $(n > 4)$.*

2.3 Основная теорема об изоморфизмах

Доказательство теоремы 1.3.1 будет опираться на две следующие леммы.

Лемма 2.3.1. *Пусть кольца Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$ изоморфны, Φ ранга > 1, причем $2K = K$ для типа F_4 и $6K = K$ для типа G_2. Тогда системы корней Φ и Φ' эквивалентны.*

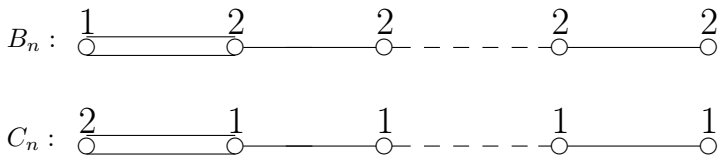
Доказательство. Допустим, что кольца Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$ изоморфны, то есть существует изоморфизм $\phi : N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$.

Пусть $r, s \in \Pi$ и $r + s \in \Phi^+$. Так как $r - s \notin \Phi$, то $e_r * e_s = N_{rs}e_{r+s} = \pm e_{r+s}$. Кроме того, $\Phi(r, s) := (Zr+Zs)\cap\Phi$ – подсистема корней ранга 2 в Φ, причем подсистема типа G_2 встречается лишь для Φ типа G_2. В графе Кокстера системы Φ корням r и s соответствуют соседние вершины. Если граф Кокстера системы Φ имеет более двух крайних корней, то $\Phi(r, s)$ типа A_2 и Φ типа D_n или E_n. Система Φ типа D_n отделяется от систем Φ типа E_n тем, что в ней есть корень соседний с тремя другими, два из которых крайние. Системы Φ типа E_n $(n = 6, 7, 8)$ различаются числами Кокстера $h = h(\Phi)$, определяющими ступень нильпотентности алгебры $N\Phi(K)$.

В системе корней Φ типа A_n нет корней соседних с тремя другими и $\Phi(r, s)$ всегда типа A_2; в этом случае изоморфизмы изучены в [13]. В оставшихся трёх системах корней встречается подсистема корней $\Phi(r, s)$ типа B_2. Заметим, что в системах корней типа B_n и C_n любая подсисте-

ма корней ранга 4 имеет число Кокстера ≤ 8. Поэтому система корней Φ типа F_4 отделяется от них, поскольку её ранг 4 и число Кокстера равно 12.

Графы Кокстера систем корней Φ типов B_n и C_n совпадают, но при $n > 2$ они различаются схемами Дынкина



(см. также [39], [40]). В силу леммы 3.3.3, при $2K \neq K$ также имеем $NB_n(K) \not\simeq NC_n(K)$.

По лемме 2.2.2, если в Φ все корни одной длины (равносильно, все подсистемы $\Phi(r,s)$ – типа A_2) или Φ – одного из типов B_n, C_n, F_4 и $2K = K$, то $L_i = L_i(N\Phi(K))$ – характеристические идеалы кольца Ли $N\Phi(K)$ и поэтому

$$\phi(L_i(N\Phi(K))) = L_i(N\Phi'(S)) \quad (1 \leq i < h(\Phi)).$$

Итак, мы можем установить биективное отображение баз $\tau : \Pi(\Phi) \to \Pi(\Phi')$, соответствующее выбранным схемам Дынкина. Отображение τ продолжается на произвольный корень $r = \sum_{p \in \Pi(\Phi)} c_p p \in \Phi^+$ по правилу

$$\tau(r) = \sum_{p \in \Pi(\Phi)} c_p \tau(p) \in \Phi^+.$$

Отсюда получаем изоморфизм $e_r \to e_{\tau(r)}$; $(r \in \Phi^+)$ алгебр Ли $N\Phi(K)$ и $N\Phi'(S)$, индуцированный эквивалентностью систем корней. Лемма

доказана. $\square$

Как следствие, вопрос об изоморфизмах $N\Phi(K) \to N\Phi'(S)$ сводится доказанной леммой к вопросу об изоморфизмах $N\Phi(K) \to N\Phi(S)$.

Лемма 2.3.2. *Всякий изоморфизм $\phi : N\Phi(S) \to N\Phi(K)$ колец Ли классического типа ранга $n > 3$ над ассоциативно коммутативными кольцами S и K с единицами есть произведение $\phi = \eta\overline{\theta}$ для подходящего изоморфизма $\theta : S \to K$ и $\eta \in Aut\ N\Phi(S)$.*

Доказательство. Для простого корня r идеал $T(r)$ алгебры $N\Phi(K)$ типа A_n всегда является (максимальным) абелевым. По лемме 2.1.1, для других классических типов абелевость $T(r)$ выполняется лишь когда r соответствует в графе Кокстера какой-либо из крайних вершин, причем для типа D_n любой из них.

Отметим, что ϕ-образ идеала $L_i(S)$ кольца Ли $ND_n(S)$ совпадает с идеалом $L_i(K)$ кольца Ли $ND_n(K)$, причем $N\Phi(S)/L_i(S) \to N\Phi(K)/L_i(K)$ – изоморфизм фактор-колец. С точностью до умножения ϕ на автоморфизм из $\widetilde{S}$ при $n \geq 5$ или вида (2.1) при $n = 4$, в силу теоремы 2.2.3 и леммы 2.2.1, существуют изоморфизмы θ_a $(a \in \Pi)$ аддитивной группы $(S, +)$ на $(K, +)$ с условием

$$\phi(xe_a) = \theta_a(x)e_a \ mod\ L_2$$

и при $x, y \in S$, $b \in \Pi$, $a + b \in \Phi$ имеем $\theta_a(S) = \theta_b(S) = K$, а также

$$\phi(xe_a * ye_b) = \phi(xe_a) * \phi(ye_b) = \theta_a(x)\theta_b(y)e_{a+b} \mod L_3(K).$$

Так как $\theta_a(1_S)K = K = \theta_b(1_S)K$, то $\theta_a(1_S)$ – обратимый элемент кольца K при любом $a \in \Pi$. С точностью до умножения ϕ на диагональный автоморфизм, можем считать $\theta_a(1_S) = 1_K$ для всех $a \in \Pi$. Отсюда легко приходим к равенствам $\theta_a = \theta_b$ для любых $a, b \in \Pi$. Полагая $\theta = \theta_a$, получаем, что $\theta : S \to K$ – кольцевой изоморфизм и лемма доказана для типа D_n.

В силу замечания 2.2.4, для кольца Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ идеалы $T_{iv}(K)$ при $i < n$ являются характеристичными. Так как $\phi(T_{iv}(S)) = T_{iv}(K),\ \ i < n$, то ϕ индуцирует изоморфизм фактор-кольца $NC_n(S)/T_{2,-2}(S)$ на кольцо $NA_n(K) \simeq NT(n+1, K)$. Учитывая описание $Aut\ NT(n, K)$ [12, Теоремы 1 и 2] и изоморфизмов [13], получаем утверждение леммы для типа C_n.

В кольце Ли $NB_n(K)$ $(n > 4)$ имеем $\phi(T_{10}(S)) = T_{10}(K)$, в силу замечания 2.2.4. Поэтому ϕ индуцирует изоморфизм фактор-кольца $NB_n(S)/T_{10}(S)$ на $NA_{n-1}(K) \simeq NT(n, K)$ и утверждение леммы завершаем аналогично типу C_n. Лемма доказана. $\square$

Применяя сейчас леммы 2.3.1 и 2.3.2, легко получаем утверждение теоремы 1.3.1.

В заключении параграфа отметим, что подгруппа центральных автоморфизмов кольца Ли шире, чем для алгебры Ли, например, [12]. Кроме того, если $\theta \in Aut\ K$, то автоморфизм $\overline{\theta}$ кольца Ли $N\Phi(K)$ является автоморфизмом алгебры Ли $N\Phi(K)$ лишь при $\theta = 1$.

2.4 Теорема о соответствии Мальцева

В этом параграфе доказывается теорема 1.3.2 о соответствии Мальцева для нильтреугольных колец $N\Phi(K)$ классических типов.

Напомним понятие фильтра. Пусть I – некоторое непустое множество. Через $S(I)$ обозначим множество всех подмножеств этого множества. *Фильтр над множеством* I определяется как множество $D \subset S(I)$, для которого:

$I \in D$;

если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$;

если $X \in D$ и $X \subset Z \subset I$, то $Z \in D$.

Фильтр D над множеством I (обозначаем (D, I)) называется *ультрафильтром над* I, если $X \in (D, I) \Leftrightarrow (I \backslash X) \notin (D, I)$ для всякого $X \in S(I)$.

Принципиальным является переход от элементарной эквивалентности к изоморфизму соответствующих систем. Связь отражает, приведенная выше в § 1.1, теорема Кейслера-Шелаха, [22], [19, Теорема 6.1.15].

В [19], [41], [42] также приведены понятия фильтра, фильтрованного произведения, ультрапроизведения и ультрастепени. Аналогично [43, Лемма 2.3] выявляется связь ультрастепеней алгебраической системы с алгебраической системой над ультрастепенями.

Лемма 2.4.1. *Для любого ассоциативно коммутативного кольца K с единицей и ультрафильтра (D, I) существует естественный изо-*

морфизм $N\Phi(K)^I/D \simeq N\Phi(K^I/D)$.

Завершим сейчас доказательство теоремы 1.3.2.

Если $K \equiv S$, то элементарная эквивалентность колец Ли $N\Phi(S) \equiv N\Phi(K)$ доказывается стандартными методами, см. [15] и [43, Лемма 2.5].

Допустим далее, что $N\Phi'(S) \equiv N\Phi(K)$. По теореме Кейслера-Шелаха, существует ультрафильтр (D, I) такой, что $N\Phi'(S)^I/D \simeq N\Phi(K)^I/D$.

Используя лемму 2.4.1, получаем

$$N\Phi'(S)^I/D \simeq N\Phi'(S^I/D), \quad N\Phi(K)^I/D \simeq N\Phi(K^I/D),$$

откуда

$$N\Phi'(S^I/D) \simeq N\Phi(K^I/D).$$

В силу теоремы 1.3.1 находим изоморфизм $K^I/D \simeq S^I/D$ и поэтому $K \equiv S$ по теореме Кейслера-Шелаха.

Тем самым, доказательство теоремы 1.3.2 завершается.

Замечание 2.4.2. *Алгебра* $A = (A, +, \cdot)$ *(не обязательно ассоциативная) названа в [44]* обертывающей *алгебры Ли* L*, если алгебра* $A^{(-)} = (A, +, *)$ *с новым умножением* $a * b := ab - ba$ *(коммутирование) изоморфна* L*; обе алгебры можем построить на одном линейном пространстве. Автоморфизмы и изоморфизмы алгебры* A *есть соответственно автоморфизмы и изоморфизмы алгебры Ли* L*, поскольку*

основные операции в L производны от операций в A. Поэтому из доказанной теоремы 1.3.2 следует, что соответствие Мальцева выполняется и для построенных в [44] обертывающих алгебр нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ классических типов.

Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 опубликованы в совместной работе [52] в нераздельном соавторстве (соавтор – В.М. Левчук).

Глава 3. Локальные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов

Наряду с необходимыми определениями в § 3.1 показано, что локальные автоморфизмы всякой алгебры (аналогично кольца) A образуют группу по композиции (предложение 3.1.3).

Основная в § 3.2 теорема 3.2.1 выявляет специальные нетривиальные локальные автоморфизмы алгебр $NT(n, K)$ $(n > 3)$ и их финитарных обобщений.

Редукционный метод исследования локальных автоморфизмов алгебры $N\Phi(K)$ в § 3.3 разрабатывает теорема 3.3.1.

3.1 Группа локальных автоморфизмов

Напомним, что *дифференцированием* алгебры A называют всякий эндоморфизм ψ модуля A такой, что при всех $\beta, \gamma \in A$ имеем

$$\psi(\beta \cdot \gamma) = \psi(\beta) \cdot \gamma + \beta \cdot \psi(\gamma).$$

Определение 3.1.1. *Локальным дифференцированием* алгебры A называют эндоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент $\alpha \in A$ как некоторое дифференцирование алгебры.

Нам потребуется следующее определение ([54] и [51]).

Определение 3.1.2. *Локальным автоморфизмом* произвольной K-алгебры A называют автоморфизм K-модуля A, действующий на каждый элемент $\alpha \in A$ как некоторый автоморфизм алгебры A, вообще говоря, зависящий от выбора α.

(Отметим, что приведенное определение имеет отличие от [45].)

Аналогично определяют локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования и для колец, [46] и др.

Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования алгебр систематически изучаются с 90-х годов. Локальные автоморфизмы алгебры $M(n, \mathbb{C})$ комплексных $n \times n$ матриц исчерпываются автоморфизмами и антиавтоморфизмами, [45].

В [47] исследуются локальные автоморфизмы простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ над полем нулевой характеристики.

Предложение 3.1.3. *Локальные автоморфизмы всякой алгебры (аналогично кольца) A образуют по умножению группу.*

Доказательство. Множество всех локальных автоморфизмов произвольной алгебры A обозначаем через $Laut\ A$. Докажем, что относительно композиции это группа.

Выберем произвольно $\phi, \psi \in Laut\ A$. Они действуют на любой элемент $x \in A$ соответственно как автоморфизмы ϕ_x, ψ_x алгебры A. Нам достаточно показать

$$(\phi\psi)_x = \phi_{\psi(x)}\psi_x, \quad (\phi^{-1})_x = (\phi_{\phi^{-1}(x)})^{-1}, \quad x \in A.$$

Очевидно, $x = \phi(z) = \phi_z(z)$ при единственном $z \in A$. Отсюда

$$\phi^{-1}(x) = z = \phi_z^{-1}(\phi_z(z)) = (\phi_z)^{-1}(x) = (\phi^{-1})_x(x),$$

$$(\phi\psi)(x) = \phi(\psi_x(x)) = \phi_{\psi_x(x)}(\psi_x(x)) = (\phi_{\psi(x)}\psi_x)(x) = (\phi\psi)_x(x).$$

Следовательно, предложение доказано для локальных автоморфизмов алгебры A.

Приведенное доказательство верно и для локальных автоморфизмов кольца A. Следует лишь заметить, что локальный автоморфизм кольца A является автоморфизмом аддитивной группы кольца A, а поэтому и его биекцией. $\square$

Предложение 3.1.3 автором вначале анонсировалось в [54], а с доказательством опубликовано в [51, Лемма 4].

Автоморфизмы называют *тривиальными локальными автоморфизмами*, а дифференцирования – *тривиальными локальными дифференцированиями*. Р. Крист [20] построил один из первых примеров нетривиального локального автоморфизма подалгебры треугольных матриц в $M(3, \mathbb{C})$ с попарно совпадающими элементами на каждой диагонали.

Примеры нетривиальных локальных автоморфизмов и локальных дифференцирований построены в [51] для алгебр $R = NT(n, K)$, $R^{(-)}$ и алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов.

Полное описание локальных автоморфизмов нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ известно только для типа A_n при малых n, более точно,

для алгебр R и $R^{(-)}$ при $n = 3$ и, когда K – поле, при $n = 4$. Редукционные методы исследования локальных автоморфизмов разрабатываются в параграфе 3.3.

Новые примеры мы построим в следующем параграфе для финитарных обобщений алгебр $NT(n, K)$.

3.2 Примеры нетривиальных локальных автоморфизмов

Нам потребуется обобщение алгебр $NT(n, K)$. Пусть Γ есть произвольное линейно упорядоченное множество (или кратко, цепь) с отношением порядка $<$. Все Γ-матрицы $\alpha = \|a_{uv}\|_{u,v\in\Gamma}$ над K с конечным числом ненулевых элементов (их называют финитарными) образуют алгебру с обычными линейными операциями и матричным умножением. Её матрицы α с условием нильтреугольности $a_{uv} = 0$ $(u, v \in \Gamma, u \geq v)$ образуют нильтреугольную подалгебру $NT(\Gamma, K)$.

Как обычно, через e_{ij} $(i, j \in \Gamma)$ обозначаем матричные единицы. Первый элемент цепи Γ (если он существует) обозначаем через p, а последний элемент – через q. Множество $\{u \in \Gamma \mid i \leq u \leq j\}$ при $i \leq j$ из Γ называем отрезком в Γ и обозначаем через $[i, j]$.

При ограничениях на $t \in K$ мы выявляем нетривиальные локальные автоморфизмы

$$1 + \varphi_{km,t} : \alpha = \|a_{ij}\| \to \alpha + ta_{km}e_{qp} \qquad (\alpha \in NT(\Gamma, K)) \tag{3.1}$$

алгебры $NT(\Gamma, K)$, при $k, m \in \Gamma$, $p < k - m < q$.

Теорема 3.2.1. *Если (3.1) есть локальный автоморфизм алгебры R для $t \neq 0$ из K, то либо a) $m = p$ и |[p,k]|=3, либо b) $k = q$ и |[m,q]|=3. Если Kt есть единственный минимальный ненулевой идеал кольца K, то (3.1) является нетривиальным локальным автоморфизмом алгебры R.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы нам нужно показать, что при $t \neq 0$ выполняется a) или b).

Предположим, что $1 + \varphi_{km,t}$ есть локальный автоморфизм алгебры R, причем (k, m) отлично от случаев а) и б). Тогда

$$(1 + \varphi_{km,t})(\alpha) = \varphi_\alpha(\alpha) \qquad (\alpha = \|a_{ij}\| \in R),$$

где $\varphi_\alpha \in Aut\ R = \mathcal{Z} \cdot J \cdot D$ для каждой матрицы $\alpha = \|a_{ij}\| \in R$, [12].

Заметим, что любой центральный автоморфизм алгебры R переводит R^2 и, в частности, e_{km} в 0. Следовательно, существует диагональная матрица $\delta = diag\{d_1, d_2, ..., d_n\}$ и унитреугольная матрица $\gamma = e + \beta = e + \|b_{ij}\|$ над K такие, что

$$(1 + \varphi_{km,t})(e_{km}) = e_{km} + te_{qp} = \gamma^{-1}(\delta^{-1}e_{km}\delta)\gamma =$$

$$= (e - \beta + \beta^2 - \beta^3 + ...)(d_k^{-1}d_m e_{km})(e + \beta) = [d_k^{-1}d_m = 1] = e_{km} +$$

$$+ e_{km}\beta + (-\beta + \beta^2 - \beta^3 + ...)e_{km} + (-\beta + \beta^2 - \beta^3 + ...)e_{km}\beta.$$

Поскольку матрицы $e_{km}\beta$ и $(-\beta+\beta^2-\beta^3+...)e_{km}$ могут иметь ненулевые элементы только в k-й строке и в m-м столбце, соответственно, то $k = q$ или $m = p$.

Рассмотрим случай

$$m = p, \quad k < q \quad |[p,k]| > 3.$$

Тогда $e_{kp} + e_{kv} \in R^2$ для некоторого $v \in [p,k]$, $v > p$.

$$(1 + \varphi_{kp,t})(e_{kp} + e_{kv}) = (e_{kp} + e_{kv}) + te_{qp} =$$

$$= (e - \beta + \beta^2 - \beta^3 + ...)(e_{kp} + e_{kv})(e + \beta) =$$

$$= (e_{kp} + e_{kv}) + (e_{kp} + e_{kv})\beta + (-\beta + \beta^2 - ...)(e_{kp} + e_{kv}) +$$

$$+(-\beta + \beta^2 - ...)(e_{kp} + e_{kv})\beta.$$

Отсюда вытекают равенства

$$b_{vp}e_{kp} = 0, \ te_{qp} = (-\beta + \beta^2 - \beta^3 + ...)(e_{kp} + e_{kv}) = b'_{qk}(e_{kp} + e_{kv})$$

откуда $t = b'_{qk} = 0$; противоречие. Случай $m = p$, $k = q$, $|[p,k]| > 3$ исследуется аналогично.

Тем самым, доказательство первого утверждения теоремы завершено. Докажем второе утверждение теоремы.

Допустим, что $m = p$ и $|[p,k]| = 3$. Тогда в цепи Γ существует единственный элемент v, промежуточный между p и k. На матрицы $\alpha \in R$ с $ta_{kp} = 0$ отображение $1 + \varphi_{kp}$ действует как единичное преобразование.

Пусть кольцо K и $t \in K$ выбраны как в теореме, и $ta_{kp} \neq 0$. Допустим $a_{kv} = 0$. Рассмотрим сопряжение унитреугольной матрицей $e - ye_{qp}$ при $y \in K$. Имеем

$$(e + ye_{qk})\alpha(e - ye_{qk}) = (e + ye_{qk})\alpha = \alpha + ya_{kp}e_{qp}.$$

Поэтому при $t = y$ сопряжение совпадает на α с $1 + \varphi_{kp}$.

Остается рассмотреть случай $a_{kv} \neq 0$ и $ta_{kp} \neq 0$. Если $ta_{kv} = 0$, то $1+\varphi_{kp}$ совпадает на α с предыдущим сопряжением (при $y = t$). Поэтому считаем $ta_{kv} \neq 0$. При $c \in K$ используем центральный автоморфизм

$$1 + \xi_{2,c} : \ \alpha \to \alpha + ca_{kv}e_{qp} \ (c \in K).$$

Докажем, что существует $c \in K$ удовлетворяющий условию $ca_{kv} = ta_{qp}$. В силу минимальности идеала (t), имеем $(t) \subseteq (ta_{kv})$. Так как $ta_{kv} \in (t)$, то верно и обратное включение, откуда $(t) = (ta_{kv})$ и $t = (ta_{kv})f$. Полагая $c = tfa_{kp}, \ f, t \in K$, находим

$$ca_{kv} = (tfa_{vp})a_{kv} = (tfa_{kv})a_{kp} = ta_{kp}.$$

Таким образом, $(1 + \xi_{2,c})(\alpha) = (1 + \varphi_{kp})(\alpha)$.

Аналогично доказывается, что значение $(1+\varphi_{qm,t})(\alpha) = \alpha+ta_{qm}e_{qp} \neq \alpha$ равно $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ с подходящей унитреугольной матрицей $\gamma = e+ye_{mp}$ или $(1 + \xi_{m,c})(\alpha)$ для подходящего $c \in (ta_{qm})$. $\square$

Пример. Ясно, что любое поле K и любой его элемент $t \neq 0$ удовлетворяют условиям теоремы. Пусть K есть кольцо вычетов кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел по модулю p^m $(m \geq 2)$. Тогда в кольце K степени

$$J^k = (p^k) \quad (k = 1, 2, ..., k)$$

главного идеала $J = (p)$ дают все идеалы $\neq K$ в кольце K, причем идеал J^{m-1} – единственный минимальный ненулевой идеал.

Известно, что всякая конечная цепь Γ порядка n изометрична цепи $\{1, 2, ..., n\}$ и, поэтому $NT(\Gamma, K) \simeq NT(n, K)$. Этот случай теоремы 3.2.1 исследовался автором ранее в совместной статье [51] в нераздельном соавторстве.

3.3 Редукция локальных автоморфизмов

Для алгебр $R = NT(n, K)$ и $R^{(-)}$ А.П. Елисова разрабатывала редукцию. В [48] она доказала тривиальность действия локальных автоморфизмов алгебры R по модулю R^2.

Данный параграф посвящен разработанной автором редукции для алгебр Ли $N\Phi(K)$ всех классических типов. Для них имеем равенство $R^2 = L_2$, кроме случаев $2K \neq K$ и Φ типа B_n и C_n, когда идеалы L_i, вообще говоря, не образуют нижний центральный ряд.

Следующая основная теорема опубликована автором в [53].

Теорема 3.3.1. В алгебре Ли $N\Phi(K)$ классического типа ранга > 4 идеал L_2 является *Laut* $N\Phi(K)$-инвариантным, а всякий локальный автоморфизм действует по модулю L_2 как её подходящий автоморфизм.

Доказательство. Известно, что стандартный центральный ряд алгебры $N\Phi(K)$ является верхним центральным (или гиперцентральным) и нижним центральным, кроме случаев $2K \neq K$, когда в Φ есть корни разных длин, а также $6K \neq K$ для типа G_2. Итак, все идеалы L_m в алгебре Ли $N\Phi(K)$ характеристичны, когда все корни в Φ одной длины

или $2K = K$ для типов B_n, C_n и F_4.

Пусть T_{im} – идеал всех Φ^+-матриц $||a_{uv}||$ с условием $a_{uv} = 0$ при $u < i$ или $v > m$. Считаем $T_{1m} := T_{im}$, если при выбранных Φ и m номер i – наименьший. В алгебре Ли $N\Phi(K)$ типа B_n (или $NB_n(K)$) выделяем подмодули $R_j := \sum_{i=j}^{n} Ke_{i0}$, $1 \le j \le n$, а также подмодуль $L_j^{[0}$ с базой $\{e_{uv} \mid 0 \le v < u \le n,\ u - v \ge j\}$.

Следующие две леммы установлены в [52].

Лемма 3.3.2. *Пусть $2K \ne K$ и $n \ge 2$. Тогда кольца Ли $NB_n(K)$ и $NC_n(K)$ порождают*

$$\{Ke_{ii-1}\ (1 \le i \le n);\quad Ke_{2,-1}\},$$

$$\{Ke_{ii-1}\ (2 \le i \le n);\quad Ke_{i,-i}\ (1 \le i \le n)\},$$

соответственно, и ни одно Ke_{iv} в них нельзя отбросить.

Аннулятор элемента 2 в кольце K обозначаем через $\mathcal{A}_2$.

Лемма 3.3.3. *Гиперцентры алгебры Ли $NC_n(K)$ $(n \ge 2)$ записываются в виде*

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 L_{2n-i-1}\ (1 \le i < 2n-1), \quad Z_{2n-1} = L_1.$$

Для алгебры $NB_n(K)$ $(n \ge 2)$ имеем:

$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 R_{n+1-i}\ (1 \le i \le n-2), \quad Z_{n-1} = L_{n+1} + \mathcal{A}_2 R_2 + \mathcal{A}_2 e_{n1},$$

$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L_{n-i-2}^{[0}\ \ (0 \le i \le n-3), \quad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1.$$

Диагональные автоморфизмы $h(\chi) : e_r \to \chi(r)e_r$ $(r \in \Phi^+)$ алгебры $N\Phi(K)$ соответствуют каждому K-характеру χ решетки корней в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K [25, § 7.1]. Отображение $t \to x_r(t) := exp\ (t \cdot ad.e_r)$ $(t \in K)$ даёт изоморфизм аддитивной группы $K^+ := (K, +)$ в группу автоморфизмов алгебры Шевалле для любого корня r; корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$ порождают группу Шевалле, [34], [25]. Ограничения автоморфизмов её унипотентной подгруппы $U\Phi(K) = \langle X_r\ (r \in \Phi^+)\rangle$ дают подгруппу J *внутренних автоморфизмов* алгебры Ли $N\Phi(K)$.

К стандартным автоморфизмам алгебры Ли $N\Phi(K)$ относят внутренние, диагональные, графовые [25, глава 12] и центральные автоморфизмы, то есть тождественные по модулю центра.

Согласно [35], если кольцо Ли (или группа) не совпадает с m-м гиперцентром, то автоморфизм, единичный по модулю m-го гиперцентра и внешний по модулю $(m-1)$-го, называем *гиперцентральным высоты* m или *гиперцентральным.*

Основные гиперцентральные автоморфизмы высоты > 1 алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов перечислены ранее, [12], [36]. Через $V(\Phi, K)$ обозначим порожденную ими подгруппу.

Пусть $R = NT(n, K)$. Хорошо известно, что присоединенная группа кольца R относительно присоединенного умножения $a \circ b = a + b + ab$ изоморфна унитреугольной группе $UT(n, K)$. Группа автоморфизмов

ассоциированной алгебры Ли $\Lambda(R)$ (т.е. $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}) найдена в [12]. При $n > 4$ это произведение

$$\mathcal{Z} \cdot J \cdot V \cdot \mathcal{D} \cdot W, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{Z}$, $\mathcal{D}$ и W – подгруппы центральных, диагональных и идемпотентных автоморфизмов, соответственно; подгруппу V порождают основные гиперцентральные автоморфизмы высоты 2 и – при $\mathcal{A}_2 \neq 0$ – высоты 3. Для кольца Ли $\Lambda(R)$ добавляется подгруппа $\simeq Aut\ K$ индуцированных автоморфизмов, [12, Теорема 1]. Описание автоморфизмов в [12] также при $n = 3, 4$ является несколько другим.

В алгебре Ли $N\Phi(K)$ типа B_n идеал L_2 больше коммутанта при $2K \neq K$, в силу лемм 2 и 3. Когда $\mathcal{A}_2 \neq 0$, он меньше гиперцентра Z_{2n-2}. Алгебра Ли $NB_n(K)$ допускает гиперцентральные автоморфизмы, высота которых зависит от ранга n линейно. Любой паре $t, d \in \mathcal{A}_2$ соответствует такой автоморфизм

$$\chi_{t,d} : \alpha \to \alpha + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k,-1}(te_{k0} + de_{n,-k}),$$

переводящий (-1)-й столбец B_n^+-матрицы в 0-й.

Подгруппу в $Aut\ NB_n(K)$, изоморфную присоединенной группе в $\mathcal{A}_2$, образуют автоморфизмы

$$\delta_c^{(-1)} : e_{kv} \to (1+c)e_{kv}\ (0 < -v < k \leq n), e_{kv} \to e_{kv}\ (0 \leq v < k \leq n),$$

при обратимом $1 + c \in 1 + \mathcal{A}_2$; их называем *полудиагональными.*

Для простых симметричных корней r и $\bar{r} \neq r$ ($\bar{\bar{r}} = r$) системы корней Φ типа D_n ($n \geq 4$), согласно [36], определено изоморфное вложение $\widetilde{\ }$ подгруппы

$$S = \{\alpha = ||a_{uv}|| \in SL(2, K) \ : \ 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0\}$$

группы $SL(2, K)$ в группу $Aut\ ND_n(K)$ по правилу

$$\widetilde{\alpha} : \quad e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}}, \quad e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}}, \quad e_s \to e_s \quad (s \in \Pi \setminus \{r, \bar{r}\}).$$

Описание автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ классических типов завершено в [36].

Заметим, что идеал L_3 даже не инвариантен относительно гиперцентрального автоморфизма $\chi_{t,d}$. С другой стороны, верна

Лемма 3.3.4. Идеал L_2 в алгебре Ли $N\Phi(K)$ ранга > 4 классического типа всегда является характеристическим.

Доказательство. Очевидно, идеал L_2 в алгебре Ли $NB_n(K)$ является $\chi_{t,d}$-инвариантным. Его $V(\Phi, K)$-инвариантность во всех случаях несложно вытекает, с учётом ограничения на лиев ранг, непосредственно из определений остальных основных гиперцентральных автоморфизмов высоты > 1, [36].

Графовые автоморфизмы алгебр Ли $N\Phi(K)$ ранга > 4 определяются только для систем корней одной длины (более точно, для типов A_n, D_n и E_n, $n = 6, 7, 8$). Как отмечалось выше, в этих случаях все идеалы L_m характеристичны. Относительно диагональных (и кольцевых)

автоморфизмов инвариантны все 1-мерные подалгебры Ke_r, а поэтому и все идеалы L_m. Это верно и для полудиагональных автоморфизмов алгебры Ли $NB_n(K)$.

Внутренние автоморфизмы действуют на L_m тождественно по модулю L_{m+1}, откуда также вытекает J-инвариантность всех L_m. Учитывая, что в условиях леммы центр Z_1 всегда лежит в L_2, получаем инвариантность L_2 относительно любого стандартного автоморфизма. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Завершение доказательства теоремы 3.3.1. Первое утверждение теоремы дает лемма 4. Докажем второе утверждение.

Алгебру Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} представляем, как и выше, алгеброй $\Lambda(R)$, $R = NT(n, K)$ $(n > 4)$. Группа ее автоморфизмов факторизуется произведением (3.2), причём её нормальная подгруппа $\mathcal{Z} \cdot J \cdot V$ действует тождественно по модулю L_2.

Положим $i' := n + 1 - i$. Согласно [12], всякий идемпотент g кольца K определяет лиев автоморфизм

$$\tau_g : e_{ij} \to ge_{ij} + (-1)^{i-j-1}(1-g)e_{j'i'},\ 1 \le j < i \le n,$$

называемый *идемпотентным* и $W =< \tau_g \mid g \in K,\ g^2 = g >$. В частности, если $i' = i + 1$, то $N_{i'i'-1} = \tau_0(N_{i+1i}) = N_{i+1i}$ есть характеристический идеал алгебры Ли $\Lambda(R)$.

Всякий локальный автоморфизм φ алгебры Ли $\Lambda(R)$ действует на произвольный её элемент по модулю L_2 как подходящий автоморфизм

из $\mathcal{D} \cdot W$. Учитывая K-модульность φ, с точностью до его умножения на автоморфизм из $\mathcal{D} \cdot W$, имеем

$$\varphi(e_{21}) = e_{21}, \quad \varphi(xe_{21}) = x\varphi(e_{21}) = xe_{21} \quad mod\ L_2 \quad (x \in K).$$

Нам потребуется

Лемма 3.3.5. *Если φ – локальный автоморфизм алгебры Ли $\Lambda(R)$ $(n > 4)$ и $\varphi(e_{21}) = e_{21}$, то*

$$\varphi(e_{i+1i}) \in N_{i+1i} + L_2, \quad 1 \leq i < n. \tag{3.3}$$

Доказательство. Предположим, что существует номер i, для которого включение (3.3) нарушается. По доказанному, $1 < i < n$ и $i' \neq i+1$. Учитывая условие $n > 4$, с точностью до умножения φ на диагональный автоморфизм, сохраняющий e_{21}, имеем

$$\varphi(e_{i+1i}) = \tau_f(e_{i+1i}) \mod R^2, \quad 1 - f \neq 0,$$

где f – некоторый идемпотент. Поскольку существует автоморфизм $\psi \in Aut\ \Lambda(R)$, действующий на $e_{21} + e_{i+1i}$ как и φ, то

$$e_{21} + fe_{i+1i} + (1-f)e_{i'i'-1} = \psi(e_{21}) + \psi(e_{i+1i}) \mod L_2. \tag{3.4}$$

Можем считать, что $\psi \in D \cdot W$, то есть $\psi = \delta\tau_g$ для подходящего идемпотента g и диагонального автоморфизма δ.

Если $i < n-1$, то $(n, n-1)$-проекция элемента (3.4) справа лежит в $(1-g)K^\sharp$, а слева - нулевая; отсюда $g = 1$ и $\psi = \delta$. Сравнивая сейчас

$(i', i'-1)$-проекции матриц в (3.4) справа и слева, приходим к равенству $1 - f = 0$; противоречие.

При $i = n - 1$ из (3.4) вытекают равенства

$$(2 - f)e_{21} + fe_{nn-1} = (ge_{21} + (1 - g)e_{nn-1})^{\delta} + (ge_{nn-1} + (1 - g)e_{21})^{\delta},$$

$$(2 - f)e_{21} + fe_{nn-1} = (cg + c(1 - g))e_{21} + (d(1 - g) + dg)e_{nn-1}$$

для некоторых обратимых элементов $c, d \in K$. Из последнего равенства получаем $d = f$. Очевидно, идемпотент является обратимым элементом лишь, когда он равен единице. Поэтому вновь получаем равенство $f = 1$; противоречие. $\square$

Из доказанной леммы сразу вытекают равенства

$$\varphi(e_{i+1i}) = c_i e_{i+1i} \quad (mod\ L_2)$$

для подходящих элементов $c_i \in K$. Следовательно, φ действует на каждый элемент e_{i+1i} по модулю L_2 как подходящий автоморфизм из $\mathcal{D}$, в частности, все элементы c_i обратимы в K. Это завершает доказательство теоремы для типа A_n.

Всякий локальный автоморфизм φ алгебры Ли $ND_n(K)$ действует на произвольный её элемент, как подходящий автоморфизм. С точностью до умножения на автоморфизм, можно даже считать выполненным равенство $\varphi(e_{2,-1}) = e_{2,-1}$.

Тогда φ действует по модулю L_2 на каждый элемент e_{i+1i} как подхо-

дящий автоморфизм из произведения $\mathcal{D} \cdot \widetilde{S}$. Следовательно,

$$\varphi(e_{21}) = a_{21}e_{2,-1} + c_1 e_{21} \quad mod\ L_2,$$

$$\varphi(e_{i+1i}) = c_i e_{i+1i} \quad mod\ L_2, \quad 2 \leq i < n,$$

где все элементы c_i $(1 \leq i < n)$ обратимы в K и $2a_{21} = 0$. С точностью до умножения φ на диагональный автоморфизм, можем считать выполненными равенства $c_i = 1$ $(1 \leq i < n)$. Тогда φ действует по модулю L_2 как автоморфизм $\widetilde{\alpha}$ с матрицей

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее замечаем, что характеристичность какого-либо идеала алгебры означает его инвариантность относительно любого локального автоморфизма алгебры. Из теоремы 2 легко вытекает

Лемма 3.3.6. *В кольце Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ идеалы T_{ij} при $i < n$ и идеалы T_{iv} при $v < 0$ являются характеристическими.*

Характеристичность в силу леммы идеала $T_{2,-2}$ в алгебре Ли $NC_n(K)$ $(n > 4)$ показывает, что всякий её локальный автоморфизм φ индуцирует локальный автоморфизм фактор-алгебры

$$NC_n(K)/T_{2,-2} \simeq NA_n(K) \simeq NT(n+1, K),$$

причём $\varphi(T_{1,-1}) = T_{1,-1}$. Применяя доказанный случай для типа A_n, получаем утверждение теоремы для типа C_n.

Далее замечаем, что в кольце Ли $NB_n(K)$ $(n \geq 5)$ всегда характеристичны идеалы T_{10} и $T_{10} + T_{21}$, причем

$$NB_n(K)/T_{10} \simeq NA_{n-1}(K) \simeq NT(n, K);$$

Применяя доказанный случай для типа A_n, получаем утверждение теоремы и для типа B_n.

Тем самым, доказательство теоремы 3.3.1 завершается. □

Замечание 3.3.7. *Наряду с финитарной алгеброй $NT(\Gamma, K)$ из § 3.2 всех Γ-матриц над K с произвольной цепью Γ индексов, рассматривают и алгебру R нефинитарных Γ-матриц над K, которая определена лишь для бесконечных цепей $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, например, [50]. Можно показать, что для каждой такой алгебры R также выполняется аналог редукционной теоремы 3.3.1.*

Список литературы

[1] *Мальцев А.И.* Элементарные свойства линейных групп // В кн.: Некоторые проблемы в Математике и механике. Новосибирск, Изд-во АН СССР. 1961. С. 110–132.

[2] *Beidar C.I., Michalev A.V.* On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemporary math. 1992. V. 131. P. 29–35.

[3] *Ершов Ю.Л.* Элементарные теории групп // ДАН СССР. 1972. Т. 203. С. 1240–1243.

[4] *Ремесленников В.Н., Романьков В.А.* Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра, топология, геометрия. 1983. Т. 21. С. 3–79.

[5] *Бунина Е.И., Михалёв А.В.* Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 3. С. 707–722.

[6] *Бунина Е.И., Михалев А.В., Пинус А.Г.* Элементарная и близкая к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр // М: МЦНМО. 2015. 360 с.

[7] *Бунина Е.И.* Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами // Успехи математических наук. 2006. Т. 61. № 2. С. 157–158.

[8] *Бунина Е.И.* Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с $1/2$ // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 443–470.

[9] *Rose B.I.* The χ_1-categoricity of Strictly Upper Triangular Matrix Rings over Algebraically Closed Fields // J. Symbolic Logic. 1978. Vol. 43, № 2. P. 250–259.

[10] *Wheeler W.H.* Model Theory of strictly upper triangular matrix ring // J. Symbolic Logic. 1980. Vol. 45. P. 455–463.

[11] *Левчук В.М.* Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец // Доклады АН СССР. 1975. Т. 222. № 6. С. 1279–1282.

[12] *Levchuk V.M.* Connections between a unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms // Siberian Mat. J. 1983. V.24. P.543-557.

[13] *Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.* Isomorphisms of Certain Locally Nilpotent Finitary Groups and Associated Rings // Acta Applicandae Mathematicae. 2004. V. 82, № 2. p. 169–181.

[14] *Videla C.R.* On the Model Theory of the Ring $NT(n, R)$ // Pure and Appl. Algebra. 1988. Vol. 55. P. 289–302.

[15] *Belegradek O.V.* Model Theory of Unitriangular Groups // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. V. 195, № 2. 115 p.

[16] *Левчук В.М., Минакова Е.В.* Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец // Доклады РАН. 2009. Т.425, № 2. С. 165–168.

[17] *Videla C.K.* On the Mal'cev correspondence // PAMS. 1990. V. 109. P. 493–502.

[18] *Левчук В.М.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Итоги науки. Юг России. Т. 6. Группы и графы. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2012. С. 71–80.

[19] *Кейслер Г., Чэн Ч.* Теория моделей // М.: Мир, 1977. 614 с.

[20] *Crist R.* Local automorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1409–1414.

[21] *Мальцев А.И.* Об одном соответствии между кольцами и группами // Матем. сборник. 1960. Т. 50. С. 257–266.

[22] *Keisler H.J.* Ultraproducts and Elementary Classes // Indag. Math. 1961. V. 23. P. 477–495.

[23] *Shelah S.* Every Two Elementarily Equivalent Models Have Isomorphic Ultrapowers // Israel J. Math. 1972. V. 10. P. 224–233.

[24] *Минакова Е.В.* Теоретико-модельные и смежные вопросы колец, ассоциированных с кольцом нильтреугольных матриц: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СФУ, Красноярск, 2008.

[25] *Carter R.W.* Simple groups of Lie type // New York: Wiley and Sons. 1972. 331 p.

[26] *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле // М.: Мир, 1975.

[27] *Бунина Е.И.* Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур: дис. ... докт. физ.-мат. наук. МГУ, Москва, 2010.

[28] *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре // М.: Наука. 1973. 400 с.

[29] *Ou S., Wang D., Yao R.* Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring // Linear Alg. Appl. 2007. Vol. 424. P. 378–383.

[30] *Levchuk V.M., Radchenko O.V.* Derivations of the locally nilpotent matrix rings // J. Algebra and Appl. 2010. Vol. 9. № 5. P. 717–724.

[31] *Бунина Е.И.* Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 3. С. 3–20.

[32] *Левчук В.М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161.

[33] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. // М.: Мир, 1972.

[34] *Шевалле К.* О некоторых простых группах // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1958. Т. 2. № 1. С. 3–53.

[35] *Левчук В.М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и Логика. 1990. Т. 29. № 3. С. 315–338.

[36] *Левчук В.М., Литаврин А.В.* Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 467–477.

[37] *Gibbs J.A.* Automorphisms of certain unipotent groups // J.Algebra. 1970. V. 14. № 2. P. 203–208.

[38] *Cao Y., Jiang D., Wang D.* Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings // International Journal of Algebra and Computation. 2007. V.17. № 3. P. 527–555.

[39] *Levchuk V.M., Suleimanova G.S.* Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // Journal of Algebra. 2012. V. 349, № 1. P. 98–116.

[40] *Serre J.-P.* Algebres de Lie semi-simple complexes, New York – Amsterdam, Benjamin, 1966.

[41] *Hodges W.* Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1993. 772 p.

[42] *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука. 1970. 119 с.

[43] *Левчук В.М., Минакова Е.В.* Автоморфизмы и теоретико-модельные вопросы для нильпотентных матричных групп и колец // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Т. 14, № 8. С. 159–168.

[44] *Левчук В.М.* Нильтреугольная подалгебра алгебры: обертывающая алгебра, идеалы и автоморфизмы // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 2. С. 137–140.

[45] *Larson D.R., Sourour A.R.* Local derivations and local automorphisms of $B(X)$ // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. V. 51. P. 187–194.

[46] *Nowicki A., Nowosad I.* Local derivations of subrings of matrix rings // Acta Mathematica Hungarica. 2004. V. 105. № 1-2. P. 145–150.

[47] *Becker T., Salsedo J.E., Salas C., Turdibaev R.* On local automorphisms of $\mathfrak{sl}_n$, arXiv:1711.11297, 2018.

[48] Elisova A.P. Local derivations and local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders // Bulletin of the Siberian State Aerospace University. 2012. V. 44. № 4. P. 17–22.

[49] *Елисова А.П.* Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных алгебр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. СФУ. Красноярск. 2013.

[50] *Беккер Ю.В., Левчук Д.В., Сотникова Е.А.* Автоморфизмы колец нефинитарных нильтреугольных матриц // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 3. С. 7–13.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[51] *Елисова А.П., Зотов И.Н., Левчук В.М., Сулейманова Г.С.* Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2011. Т. 4. № 1. С. 9–19.

$http://mathizv.isu.ru/assets/articles/4746419833196719420.pdf$

[52] *Зотов И.Н., Левчук В.М.* Соответствие Мальцева и изоморфизмы нильтреугольных подколец алгебр Шевалле // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 4. С. 135–145.

$http://journal.imm.uran.ru/2018-v.24-4-pp.135--145$

[53] *Zotov I.N.* Local automorphisms of nil-triangular subalgebras of classical Lie type Chevalley algebras // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019. V. 12. № 5. P. 598–605.

$http://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/125578$

[54] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых степеней // Тр. XLII краевой науч. студ. конф. по математике и компьютерным наукам. Красноярск: СФУ. 2009. С. 24–25.

[55] *Зотов И.Н., Левчук В.М., Майсурадзе Д.Н.* Локальные дифференцирования и автоморфизмы линейных колец Ли // Тезисы докладов международной конференции "Алгебра, логика и приложения". Красноярск: СФУ. 2010. С. 162.

[56] *Зотов. И.Н.* Элементарно эквивалентные максимальные унипотентные подгруппы групп Шевалле // Сборник материалов VIII Всероссийской научно-техн. конференции "Молодежь и наука". Красноярск: СФУ. 2012. С. 20-21.

[57] *Зотов И.Н.* Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Тез. докл. XI международной школы-конференции по теории групп, посвященной 70-летию А.Ю. Ольшанского. Красноярск: СФУ. 2016. С. 23-24.

[58] *Зотов И.Н.* Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец // Электронный сборник тез. докл. международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2016. С. 185.

[59] *Зотов И.Н.* Элементарная эквивалентность некоторых нильпотентных неассоциативных колец // Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвященную 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Москва: Издательство МГУ. 2018. С. 86-87.

[60] *Зотов И.Н.* Изоморфизмы и элементарная эквивалентность нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов // Тез. докл. Всероссийской конференции по математике и механике, посвящённой 140-летию Томского государственного университета и

70-летию механико-математического факультета. Томск: ТГУ. 2018. С. 28.

[61] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле классических типов // Электронный сборник тез. докл. международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2019. С. 162.

[62] *Зотов И.Н.* Локальные автоморфизмы алгебр нефинитарных нильтреугольных матриц // Тез. докл. конференции "Алгебра и ее приложения посвященной 70-летию пермской алгебраической школы им. С. Н. Черникова. Пермь: ПГНИУ. 2020. С. 22.

[63] *Levchuk V.M., Zotov I.N.* Nonfinitary niltriangular algebras and their automorphism groups // Электронный сборник тез. докл. международной конференции "Мальцевские чтения". Новосибирск: ИМ СО РАН. 2020. С. 162.

Наиболее употребительные обозначения

Φ – система корней евклидова пространства, Π – ее база, Φ^+ – система положительных корней;

K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей;

Γ — произвольная (если не оговорено противное) цепь или линейно упорядоченное множество с отношением порядка $\leq$;

$NT(\Gamma, K)$ — кольцо финитарных $\Gamma-$матриц $\| \ a_{ij} \ \|_{i,j\in \ \Gamma}$ над K с условием нильтреугольности $a_{ij} = 0$, $i \leq j$;

$NT(n, K)$ — кольцо нильтреугольных $n \times n$ матриц над K;

$\mathcal{A}_m$ – аннулятор $\{x \in K \mid x \cdot m = 0\}$ в K элемента $m \in K$;

$\mathcal{L}_K$ – алгебра Шевалле над K с базисом Шевалле [25, § 4.3] и умножением $[,]$;

$N\Phi(K)$ – подалгебра в $\mathcal{L}_K$, базис которой дают элементы базиса Шевалле e_r $(r \in \Phi^+)$;

$x_r(t)$ – корневой автоморфизм алгебры Шевалле $\mathcal{L}_K$ при $r \in \Phi,\ t \in K$;

$U(\Phi, K)$ – унипотентная подгруппа $\langle x_r(t) \mid r \in \Phi^+,\ t \in K\rangle$ группы Шевалле.