CONTINUATION OF POWER SERIES BY ENTIRE AND MEROMORPHIC INTERPOLATION OF COEFFICIENTS

Mkrtchyan Aleksandr

Analytic functions play a very important role in mathematics and its applications in science. Analytic functions bridge the gap between exact and approximate computations.

One way to identify an analytic function is based on its power series expansion (Weierstrass' approach). The coefficients of a power series expansion of an analytic functions carry all the information about properties of this function, including the property of its analytic continuation. This problem and the closely related problem of relationships between singularities of power series and its coefficients have been extensively studied in the last century by Hadamard, Lindelöf, Polya, Szegö, Carlson and many other prominent mathematicians.

Most effective and complete results were obtained for simple (one-dimensional) series with coefficients interpolated by values $\varphi(k)$ of an entire function $\varphi(z)$ on the natural numbers $k \in N$.

According to Abel's theorem, the domain of convergence for a one-dimensional series is a disc, therefore, if its sum extends analytically beyond this disc, it extends across some boundary arc. This arc is called the *arc of regularity.* A description of an open arc of regularity was given in the papers by Arakelian. In terms of the indicator function of the interpolating entire function he gave a criterion for a given arc of a unit circle to be an arc of regularity for a given power series.

Polya found conditions for analytic continuability of a series to the whole complex plane except some boundary arc.

The other side of the problem of analytic continuation is the problem of distribution of singularities of a power series, i.e. points such that the sum of series does not extends across them. In this context, the situations where all the boundary points are singular are of special interest. Such analytically nonextendable series are mainly "strongly lacunar", in other words, these series have "many" monomials with zero coefficients. Examples of such series are

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^n}.$$

Already in 1891 Fredholm constructed examples of "moderately lacunar" nonextendable series representing infinitely differentiable functions in the closure of the disc of convergence. These series depend on a parameter a and have the following form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \qquad 0 < a < 1.$$

It should be emphasized that approach to the study of analytic continuation formulated above has been mainly applied to functions of one variable. In the case of multivariate power series many similar questions remain open. Moreover, the applications of multivariate complex analysis in mathematical physics, for example in quantum field theory and thermodynamics, motivate further research in this area.

The aim of this thesis is to find multidimensional analogs of theorems of Arakelian and Polya on the analytic continuability of a power series across parts of the boundary of the domain of convergence. Also, to describe the conditions for analytic continuability of a power series whose coefficients are interpolated by entire or meromorphic function, and to construct multidimentional examples of Fredholm series of moderately lacunar power series with natural boundaries of the convergence domains.

In the investigation we use methods of multivariate complex analysis, in particular, integral representations (Cauchy, Mellin, and Lindelöf representations), multidimensional residues, properties of power series. An important role in the study is played by interpolation of the power series coefficients by analytic functions from such classes as entire functions of exponential type or special meromorphic functions.

Accordingly, we use some facts on the growth of interpolating functions, i.e. elements of complex potential theory.

In the question on the natural boundary of the domain of convergence we use the Kovalevskaya phenomenon on the unsolvability of the Cauchy problem for the heat equation with temperature initial data.

The main results:

We give a criterion for analytic continuability of a multivariate power series across a boundary polyarc. The criterion is given in terms of asymptotic behaviour of the entire function interpolating the coefficients.

We find conditions for a univariate series to extend locally across a boundary arc and conditions for extension into a sectorial domain by using meromorphic interpolation of the coefficients.

Also, we construct a lacunar scale for power series of one variable nonextendable beyond the disc of convergence that represent infinitely differentiable functions in the closure of the disc. This scale includes the Fredholm series, using this scale we construct examples of multivariate series in the unit polydisc with similar properties.

ПРОДОЛЖИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПОСРЕДСТВОМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Мкртчян Александр Джанибекович

Аналитические функции играют важную роль в математике и различных науках точного естествознания. Они составляют пласт математики, лежащий на стыке между точными вычислениями и приближенными. Один из способов идентификации аналитической функции основан на разложении ее в степенной ряд (подход Вейерштрасса). На языке коэффициентов ряда можно описывать свойства аналитической функции, важнейшим из которых является свойство аналитической продолжимости ряда за пределы его области сходимости. Такая проблематика аналитического продолжения, а также описания связей между особенностями степенных рядов и их коэффициентами активно исследовалась в прошлом столетии в работах Адамара, Линделефа, Полиа, Сеге, Карлсона и многих других известных математиков.

Наиболее эффективные и завершенные результаты были получены для простых (одномерных) рядов, у которых коэффициенты ряда интерполируются значениями $\varphi(k)$ целой функции $\varphi(z)$ на множестве натуральных чисел: $k \in N$.

Согласно лемме Абеля область сходимости одномерного ряда – круговая, поэтому речь о продолжимости суммы степенного ряда за пределы области сходимости можно вести на языке граничной дуги, через которую возможно продолжение. Такая дуга называется *дугой регулярности*. Описание открытой дуги регулярности было сделано в статьях Аракеляна. В терминах индикатрисы роста интерполирующей целой функции им дан критерий для того, чтобы выбранная дуга единичной окружности была дугой регулярности для рассматриваемого ряда.

Полиа получил условия для продолжимости ряда на всю комплексную плоскость, кроме некоторой граничной дуги.

Также глубоко изучена проблема нахождения множеств сингулярных точек ряда, т.е. точек, через которые сумма ряда не продолжается. В такой постановке указанной проблемы особое место занимает ситуация, когда все граничные точки особые, то есть когда сумма ряда не продолжается через границу своей области сходимости. В основном, примеры рядов, аналитически непродолжимых за пределы своего круга сходимости, относятся к серии “сильно лакунарных” рядов, иными словами, у этих рядов “много” мономов с нулевыми коэффициентами. Таковыми рядами являются следующие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^n}.$$

Еще в 1891г. Фредгольм построил примеры “умеренно лакунарных” непродолжимых рядов, причем представляющих бесконечно дифференцируемые функции в замыкании их круга сходимости. Эти ряды зависят от параметра a и они имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2}, \qquad 0 < a < 1.$$

Здесь степень n^2 имеет порядок роста 2 относительно индекса суммирования n, поэтому будем говорить, что ряды Фредгольма имеют порядок лакунарности два.

Следует заметить, что обозначенный выше подход к исследованию проблемы аналитического продолжения в основном был реализован для степенных рядов одного переменного. Между тем, в многомерной теории степенных рядов в этой области исследований много вопросов оставались открытыми до недавнего времени. Актуальность таких исследований мотивируется как внутренними запросами многомерного комплексного анализа, так и приложениями в математической физике, например, в квантовой теории поля и термодинамике.

Целью работы является нахождение многомерных аналогов теорем Аракеляна и Полиа об аналитическом продолжении степенного ряда через куски из границы его области сходимости, описание условия продолжимости степенного ряда, коэффициенты которого интерполируются значениями целой или мероморфной функции, построение многомерных феноменов Фредгольма умеренно лакунарных степенных рядов с естественными границами своих областей сходимости.

Методы исследования

В основе исследования лежат методы многомерного комплексного анализа, в частности, используются техника интегральных представлений (Коши, Меллина, Линделефа), аппарат многомерных вычетов и свойства степенных рядов.

Важную роль играют интерполяции коэффициентов степенного ряда значениями аналитических функций таких классов, как целые функции экспоненциального типа или специальные мероморфные функции. В связи с этим использовалась информация о росте интерполирующих функций, т.е. фрагменты комплексной теории потенциала.

В вопросе об естественной границе области сходимости используется идея феномена Ковалевской об аналитической неразрешимости задачи Коши для уравнения теплопроводности, поставленной по температурным начальным данным.

Основные результаты работы следющие:

Получен критерий продолжимости кратного степенного ряда через граничное множество полидуг на языке асимптотического поведения целой функции, интерполирующей коэффициенты ряда.

Для одномерных рядов найдены условия локальной продолжимости ряда через граничную дугу, и условия продолжимости ряда в секториальную область, используя мероморфные интерполяции коэффициентов ряда.

Построена лакунарная шкала степенных рядов одного переменного, непродолжимых за пределы круга сходимости и бесконечно дифференцируемых в замыкании круга, включающая в себя ряды Фредгольма. На основе этой шкалы построены примеры кратных степенных рядов с аналогичными свойствами в единичном поликруге.